Lektion 8: Berechnung der Nullstellen von Funktionen

Wie bereits in Lektion 7 definiert handelt es sich bei den Nullstellen einer Funktion um ihre Schnittstellen mit der x-Achse, also die x-Koordinaten, an denen y = 0 gilt.
Wie aber werden solche Nullstellen berechnet?

1) Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Bei der Untersuchung ganzrationaler Funktionen auf ihre Nullstellen kann man sich am Fundamentalsatz der Algebra orientieren, d.h. es gibt nie mehr Nullstellen, als der Grad der ganzrationalen Funktion angibt.

1.1) Nullstellen linearer Funktionen:

Die Funktionsgleichung der linearen Funktion lautet allgemein f(x) = mx + b.

Wird diese 0 gesetzt, erhält man: mx + b = 0 <=> mx = -b <=> $x = -\frac{b}{m}$.

Wir sehen: Jede lineare Funktion enthält genau eine eindeutig berechenbare Nullstelle.

1.2) Nullstellen quadratischer Funktionen:

Die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion lautet allgemein: $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Wird diese 0 gesetzt, gibt es grundsätzlich drei verschiedene Möglichkeiten:

a) c = 0: In diesem Fall gilt: $ax^2 + bx = 0$ <=> $x(ax + b) = 0$ <=> $x_1 = 0$ V $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Hier kommt zur Anwendung, dass ein Produkt genau dann 0 wird, wenn einer der Faktoren 0 ist. Da wir x ausklammern können, bekommen wir auf einfache Weise ein Produkt, bei dem der erste Faktor eben gerade dieses x ist.
Diese Variante der quadratischen Funktion hat immer genau zwei Nullstellen, von denen immer eine 0 ist.

b) b = 0: In diesem Fall gilt: $ax^2 + c = 0$ <=> $ax^2 = -c$ <=> $x^2 = -\frac{c}{a}$ <=> $x_{1;2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Wenn der Radikand $-\frac{c}{a} > 0$ ist, gibt es demnach zwei Lösungen, ist er dagegen < 0, hat die quadratische Funktion keine Nullstelle, da die Quadratwurzel aus einem negativen Radikanden im Reellen nicht gezogen werden kann. In diesem Fall ist der Graph der quadratischen Funktion entweder eine nach oben geöffnete Parabel, die komplett oberhalb der x-Achse verläuft, oder eine nach unten geöffnete Parabel, deren Graph komplett unterhalb der x-Achse verläuft.

c) Der allgemeine Fall: $ax^2 + bx + c = 0$ <=> $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Wenn wir an dieser Stelle den Quotienten $\frac{b}{a}$ durch p ersetzen und den Quotienten $\frac{c}{a}$ durch q, bekommen wir eine quadratische Gleichung in ihrer *Normalform*:

$x^2 + px + q = 0$ <=> $x^2 + px = -q$ <=> $x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

(Hier wurde die *quadratische Ergänzung* addiert)

<=> $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ - q <=> x + $\frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ <=> $x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Diese Form der Lösung einer quadratischen Gleichung in der Normalform ist das *Lösen mit Hilfe der quadratischen Ergänzung*, allgemein wie oben durchgerechnet führt diese Lösungsvariante zur *p-q-Formel zur Lösung einer quadratischen Gleichung in ihrer Normalform*.

Hier hängt nun die Anzahl der Lösungen offensichtlich vom Radikanden $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ - q ab. Dieser Radikand wird in diesem besonderen Fall auch die *Diskriminante der quadratischen Gleichung (D)* genannt. Ist D < 0, gibt es keine Lösung, ist D = 0, gibt es eine Lösung und für D > 0 zwei Lösungen.
Der Fall einer Lösung, also nur einer Nullstelle der quadratischen Funktion, entspricht der Lage des *Scheitelpunktes* auf der x-Achse.

1.3) Nullstellen ganzrationaler Funktionen höheren Grades:
Zunächst sollen wieder einige Spezialfälle betrachtet werden:

a) Funktionen, bei denen x-Potenzen ausgeklammert werden können:
Solche Funktionen sind von der Art $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_r x^r$ und es kann in der Gleichung $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_r x^r = 0$ x^r ausgeklammert werden:
$x^r (a_nx^{n-r} + a_{n-1}x^{n-1-r} + ... + a_r) = 0$ <=> $x^r = 0$ V $a_nx^{n-r} + a_{n-1}x^{n-1-r} + ... + a_r = 0$.
Diese Gleichung hat zunächst einmal die r-fache Lösung (also die r-fache Nullstelle der Funktion) $x_{1;...;r} = 0$ und als weitere Nullstellen die Lösungen der Gleichung
$a_nx^{n-r} + a_{n-1}x^{n-1-r} + ... + a_r = 0$. Ist diese Gleichung z.B. quadratisch, fällt die Berechnung der weiteren Lösungen leicht (s.o.).

<u>Beispiel:</u> $f(x) = 2x^5 – 8x^4 + 6x^3 = 0$ <=> $x^3 (2x^2 – 8x + 6) = 0$
<=> $x^3 = 0$ V $2x^2 – 8x + 6 = 0$ <=> $x_{1;2;3} = 0$ V $x^2 – 4x + 3 = 0$
<=> $x_{1;2;3} = 0$ V $x_{4;5} = 2 \pm \sqrt{4-3}$ <=> $x_{1;2;3} = 0$ V $x_4 = 1$ V $x_5 = 3$.

b) Funktionen, bei denen eine Substitution möglich ist:
Das sind Funktionen der Form $f(x) = ax^{2r} + bx^r + c$. Wird hier der Funktionsterm Null gesetzt, kann x^r z.B. durch z substituiert werden: $az^2 + bz + c = 0$, man erhält also eine quadratische Gleichung, die einfach durch die p-q-Formel (s.o.) gelöst werden kann. Eine anschließende Rücksubstitution $z = x^r$ und ziehen der r-ten Wurzel aus den Lösungen aus der p-q-Formel ergibt die Lösungen. Zu beachten ist dabei, dass bei geradem r jeweils die positive als auch die negative r-te Wurzel Lösungen sind.

<u>Beispiel:</u> $f(x) = 2x^8 –8x^4 + 6 = 0$ <=> $x^8 – 4x^4 + 6 = 0$ / Substitution: setze $x^4 = z$, dann folgt: $z^2 – 4z + 6 = 0$ <=> (...) <=> $z_1 = 1$ V $z_2 = 3$ / Rücksubstitution: setze $z = x^4$, dann folgt: $x^4 = 1$ V $x^4 = 3$ <=> $x_1 = -\sqrt[4]{1} = -1$ V $x_2 = \sqrt[4]{1} = 1$ V $x_3 = -\sqrt[4]{3}$ V $x_4 = \sqrt[4]{3}$

c) Funktionen in Linearfaktorzerlegung: Hier können die Lösungen praktisch „abgelesen“ werden: f(x) = (x – a) (x – b) (x – c) ... = 0 <=> x – a = 0 V x – b = 0 V x – c = 0 V ...
<=> $x_1 = a$ V $x_2 = b$ V $x_3 = c$ V ...

d) Funktionen, bei denen keiner der Fälle a) – c) zutrifft: Wir haben also ganz allgemein eine ganzrationale Funktion der Form $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}$ **+ ... +** $a_1x + a_0$ vorliegen. Sollte eine solche Funktion überhaupt ganzzahlige Nullstellen haben, so sind diese stets Teiler des

Absolutgliedes a_0. Diese Erkenntnis eröffnet eine Lösungsmöglichkeit: wir können alle positiven und negativen ganzzahligen Teiler von a_0 darauf untersuchen, ob sie Nullstellen von f(x) sind, d.h. wir suchen Nullstellen „durch Probieren“.
Angenommen, wir haben b als Nullstelle durch Probieren entdeckt. In diesem Fall kann die Funktion durch den Linearfaktor (x – b) geteilt werden, wie der Fall c) zeigt. D.h. es gibt eine ganzrationale Funktion g(x), die im Grad um 1 niedriger ist als f(x) und für die gilt:

$f(x) = (x - b) \cdot g(x) \iff f(x) : (x - b) = g(x)$. Um nun g(x) zu berechnen, kann entweder eine **Polynomdivision** durchgeführt werden oder aber das **Horner-Schema** angewendet werden. Beide Verfahren sollen hier vorgestellt werden.

d.1) Die Polynomdivision

Allgemein lässt sich das Verfahren so erläutern: Zunächst müssen beide Polynome, also das, das geteilt wird, und auch das, durch das geteilt wird, nach der Größe der Variablenpotenzen angeordnet werden, die größte Potenz zuerst. Nun erfolgen drei Rechenschritte:
1) Die höchste Variablenpotenz des zu teilenden Polynoms wird durch die höchste Potenz des Polynoms, durch das geteilt wird, mitsamt den Vorfaktoren dividiert und das Ergebnis rechts neben dem Gleichheitszeichen notiert.
2) Mit diesem Ergebnis wird das gesamte Polynom, durch das geteilt wird, multipliziert und das Produkt unter das zu teilende Polynom geschrieben.
3) Das bei 2) erhaltene Polynom wird vom oberen subtrahiert und die Differenz darunter notiert.
Mit dieser Differenz wird nun wieder bei 1) weiter gerechnet, bis schließlich der Grad des zu teilenden Polynoms kleiner ist als der Grad des Polynoms, durch das geteilt wird.

Speziell ist das Polynom, durch das geteilt wird, im Falle der Nullstelle b der Linearfaktor (x – b), d.h. unter 1) wird stets nur durch x geteilt.

Beispiel: Die Nullstellen von $f(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 20$ sollen berechnet werden. Das Absolutglied ist 20, seine Teilermenge ist $T_{20} = \{-1; 1; -2; 2; -4; 4; -5; 5; -10; 10; -20; 20\}$, d.h. alle diese ganzen Zahlen kommen als mögliche Nullstellen von f(x) in Frage. Wir untersuchen, angefangen mit der am leichtesten einzusetzenden Zahl 1, welche davon tatsächlich Nullstelle ist und finden „durch Probieren“ $x_1 = 2$, d.h. f(x) kann durch den Linearfaktor (x – 2) geteilt werden. Dieses geschieht mittels Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 - 8x^2 - 2x + 20) : (x - 2) = 2x^2 - 4x - 10 \\
-(2x^3 - 4x^2) \qquad\qquad \text{--------} \\
\text{---------------} \\
\qquad -4x^2 - 2x + 20 \\
\quad -(-4x^2 + 8x) \\
\quad \text{---------------} \\
\qquad\qquad -10x + 20 \\
\qquad\quad -(-10x + 20) \\
\qquad\quad \text{----------------} \\
\qquad\qquad\qquad \mathbf{0} \quad (\leftarrow = \mathbf{f(2)}\ !) \\
\qquad\qquad\qquad ===========
\end{array}
$$

Aus dieser Polynomdivision folgt nun: $f(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 20 = (x - 2)(2x^2 - 4x - 10)$.
Bei der Rechnung handelt es sich immer um eine *Division mit einem Rest*, der nicht mehr weiter geteilt werden kann. Bei der Polynomdivision durch einen Linearfaktor (x – a) entspricht der Rest genau dem Funktionswert von f(x) an der Stelle a, also im Falle einer Nullstelle ist der Rest 0.

Um nun weitere Nullstellen zu berechnen, muss noch der zweite Faktor gleich 0 gesetzt werden, da gilt: $(x-2)(2x^2-4x-10)$ <=> $x-2=0$ V $2x^2-4x-10=0$.

$2x^2-4x-10=0$ <=> $x^2-2x-5=0$ <=> $x_{2/3}=-\frac{-2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2-(-5)}=1\pm\sqrt{6}$.

Insgesamt hat f(x) also die Nullstellen: $x_1=2$; $x_2=1-\sqrt{6}$; $x_3=1+\sqrt{6}$ und es folgt die **vollständige Zerlegung von f(x) in Linearfaktoren**; dabei darf nicht der Faktor 2 vergessen werden, da beim Lösen der quadratischen Gleichung durch 2 geteilt worden ist:
$f(x)=2x^3-8x^2-2x+20=2(x-2)(x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6})$.

<u>Anmerkung:</u> Der Zerlegungssatz für eine ganzrationale Funktion

Wir haben gelernt, dass sich eine Funktion in Linearfaktoren zerlegen lässt, wenn ihre Nullstellen gefunden worden sind. Tatsächlich lässt sich jede ganzrationale Funktion durch Polynomdivision durch einen Linearfaktor (x – a) zerlegen, auch wenn a keine Nullstelle ist. Dabei muss lediglich der „Rest“ f(a) beachtet werden. Dann gilt:

$$f(x)=(x-a)\cdot f_a(x)+f(a) \iff f(x):(x-a)=f_a(x)+\frac{f(a)}{x-a}.$$

In diesem *Zerlegungssatz* bedeutet $f_a(x)$ das Ergebnis der Polynomdivision.

Die Polynomdivision kann immer eingesetzt werden, also auch, wenn nicht wie im Falle der Nullstellensuche „nur“ durch einen Linearfaktor (x – a) geteilt werden muss. Das bedeutet, die Polynomdivision „funktioniert“ auch so: $f(x):g(x)=f_{g(x)}(x)+\frac{R(x)}{g(x)}$, wobei R(x) wiederum den Rest meint, der nicht weiter durch g(x) geteilt werden kann. Dabei muss lediglich gelten: Grad(f(x)) $\geq$ Grad(g(x)).
Nun wird so lange geteilt, bis gilt: Grad(R(x)) < Grad(g(x)).

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{array}{l}
\quad(4x^4-2x^3+x^2+5x-1):(2x^2+3x+2)=2x^2-4x+4{,}5\\
-(4x^4+6x^3+4x^2)\\
\text{----------------------}\\
\qquad\quad -8x^3-3x^2+5x-1\\
\qquad -(-8x^3-12x^2-8x)\\
\qquad\text{------------------------}\\
\qquad\qquad\qquad 9x^2+13x-1\\
\qquad\qquad -(9x^2+13{,}5x+9)\\
\qquad\qquad\text{----------------------}\\
\qquad\qquad\qquad\quad -0{,}5x-10\\
\qquad\qquad\qquad\quad ========
\end{array}$$

Das bedeutet es gilt:
$(4x^4-2x^3+x^2+5x-1):(2x^2+3x+2)=2x^2-4x+4{,}5+\frac{-0{,}5x-10}{2x^2+3x+2}$ und damit die Zerlegung: $4x^4-2x^3+x^2+5x-1=(2x^2+3x+2)(2x^2-4x+4{,}5)-0{,}5x-10$.

d.2) Das Horner-Schema

Im oberen Beispiel hatten wir einen allgemeinen Fall kennen gelernt, in dem ein beliebiges Polynom durch ein anderes beliebiges Polynom niedrigeren Grades geteilt wurde. Bei Division speziell durch einen Linearfaktor (x – a) ist jedoch die Anwendung des Horner-Schemas der wesentlich einfachere und schnellere Weg. Dabei muss überhaupt nicht verstanden werden, warum dieses Schema funktioniert, sondern aufgrund der Einfachheit in der Anwendung gönnen wir uns einfach den Luxus, diese Funktionalität wohlwollend hinzunehmen.

Das Horner-Schema besteht aus drei Zeilen. In der oberen Zeile stehen nebeneinander alle Vorfaktoren des zu teilenden Polynoms; dabei ist wichtig zu beachten, dass eine Null („0“) einzutragen ist, falls eine Variablenpotenz nicht im Polynom vorkommt.
Bsp.: für $f(x) = 3x^3 - 4x + 1$ trage in die 1. Zeile ein: 3 0 -4 1.
Die 2. Zeile beginnt mit einer Null („0“). In die dritte Zeile wird in jeder Spalte die Summe aus erster und zweiter Zeile eingetragen. Diese Summe ist mit dem „a“ des Linearfaktors (x – a), durch den geteilt wird, zu multiplizieren und dieses Produkt jeweils in die nächste Spalte und zweite Zeile einzutragen. Wenn wir so vorgehen, erhalten wir in der letzten Spalte und dritten Zeile den Funktionswert f(a), die übrigen Zahlen der 3. Zeile bilden die Vorfaktoren des Polynoms, das wir nach der Division erhalten.

<u>Beispiel:</u> Oben sollte $f(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 20$ durch den Linearfaktor (x – 2) geteilt werden. Wir wenden das Horner-Schema an:

```
          2   -8   -2   20
       +  0    4   -8  -20
          ----------------
(a = 2)   2   -4  -10  (0) => f(2) = 0
```

Aus der 3. Zeile folgt: $f_2(x) = 2x^2 - 4x - 10$, wir erhalten also (klar!) das gleiche Ergebnis wie oben durch die Polynomdivision, nur erheblich komfortabler.
Da wir mittels des Horner-Schemas auch immer den Funktionswert f(a) bekommen, eignet dieses sich auch zur sehr einfachen Funktionswerteberechnung, beispielsweise auf der Suche nach einer Nullstelle „durch Probieren“. Vorteil: wird durch Anwendung des Horner-Schemas „probiert“, ist man anschließend auch schon fertig!

<u>2) Nullstellen nicht ganzrationaler Funktionen</u>

Dieses Kapitel umfasst die Berechnung der Nullstellen beliebiger nicht-ganzrationaler Funktionen. Hierbei handelt es sich um gebrochen-rationale und nicht-rationale Funktionen, letztere können trigonometrische, Wurzel-, Exponential- und Logarithmusfunktionen sein. Diese Aufzählung klingt komplizierter, als sie eigentlich ist, denn tatsächlich machen bei der Nullstellenberechnung die ganzrationalen Funktionen die meisten Probleme, wie wir gleich sehen werden.

2.1) Nullstellen gebrochen rationaler Funktionen

Bei den gebrochen rationalen Funktionen handelt es sich um Funktionen vom Typ f(x) = $\frac{z(x)}{n(x)}$, wobei z(x) und n(x) für sich betrachtet wiederum ganzrational sind. Da ein Bruch nur dann 0 sein kann, wenn der Zähler 0 ist, müssen wir demnach lediglich die ganzrationale Funktion z(x) = 0 setzen und eine der Rechnungen durchführen, wie sie unter 1) beschrieben worden sind. Allerdings gilt es, noch eine kleine „Schikane" zu beachten: das Nennerpolynom n(x) könnte ebenfalls 0 werden! Da in diesem Fall verbotenerweise eine Division durch 0 erfolgen würde, welche nicht definiert ist, nennen wir diese Nennernullstellen auch **Definitionslücken** der Funktion f(x).

Haben wir eine Definitionslücke gefunden, die gleichzeitig Nullstelle ist, handelt es sich um eine **„hebbare Lücke"**. Bsp.: sei h sowohl Nullstelle der Zählerfunktion als auch der Nennerfunktion, d.h. gelte: z(h) = n(h) = 0. Dann lässt sich, wie wir oben gesehen haben, sowohl im Zähler als auch im Nenner der Linearfaktor (x – h) mittels Polynomdivision bzw. Horner-Schema abspalten und wir erhalten:

$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} = \frac{(x-h)\bullet z_h(x)}{(x-h)\bullet n_h(x)}$. Hier könnte sofort angenommen werden, dass der letzte Bruch durch den Linearfaktor (x – h) gekürzt werden kann; dem ist auch so, aber eben nicht an der Stelle x = h! Denn gerade an dieser Definitionslücke darf im eigentlichen Sinne nicht durch diesen Linearfaktor gekürzt werden, weil er dann Null wird und durch Null nicht gekürzt werden kann, denn das würde eine nicht definierte Division durch Null bedeuten.

Das heißt nun aber: für alle Stellen $x \neq h$ ist $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} = \frac{(x-h)\bullet z_h(x)}{(x-h)\bullet n_h(x)} = \frac{z_h(x)}{n_h(x)} = f^*(x)$.

Glücklicherweise hat eine hebbare Lücke jedoch noch eine besondere Eigenschaft: an der Stelle x = h existiert für den Funktionswert ein Grenzwert, es gilt nämlich:

$\lim\limits_{x \to h}\left(f(x)\right) = f^*(h)$. Das bedeutet: zwar ist die Funktion gerade an der Stelle x = h nicht definiert, aber es fehlt gewissermaßen „nur ein Punkt" im Graphen der Funktion. Und genau dieser Punkt kann durch ($h/f^*(h)$) ergänzt werden, wodurch f(x) wieder **stetig** wird (die Definition der Stetigkeit einer Funktion soll in einer anderen Lektion erläutert werden).

Insgesamt heißt das: an der Definitionslücke x = h ist f(x) zwar nicht stetig, kann aber durch den Punkt ($h/f^*(h)$) **stetig ergänzt** werden. Die Definitionslücke wird durch diese stetige Ergänzung behoben, daher der Name **hebbare Lücke**.

Definitionslücken, die nicht hebbar sind, heißen Polstellen x_p. An diesen Stellen existiert der Funktionsgraph nicht, er nähert sich lediglich „unendlich dicht" einer zur y-Achse parallelen Gerade $x = x_p$ an, also einer senkrechten *Asymptote*.

2.2 Nullstellen von Wurzelfunktionen

Eine beliebige Wurzel kann nur dann Null werden, wenn der Radikand, also der Term unter der Wurzel, Null ist. Ist dieser Term wiederum ganzrational oder gebrochen rational, wird wie bereits beschrieben gerechnet.

Allerdings ist bei Wurzelfunktionen eher interessant, wann der Term unter der Wurzel **kleiner als Null** wird, denn alle geraden Wurzeln (2-te, 4-te, 6-te usw. Wurzel) sind in diesem Fall im Reellen nicht definiert.

Beispiel: $f(x)=\sqrt{5x-7}$. Die Nullstelle ist leicht zu berechnen:

5x – 7 = 0 <=> $x=\frac{7}{5}$ = 1,4. Um festzustellen, wann der Radikand kleiner 0 wird, setzen wir: 5x – 7 < 0 <=> x < $\frac{7}{5}$. Daraus ergibt sich der **Definitionsbereich der Wurzelfunktion:** ID_f = $\left\{x\in\mathbb{R}; x\geq\frac{7}{5}\right\}$.

2.3 Nullstellen von Logarithmusfunktionen

Bekanntlich wird mit dem Logarithmus der Exponent einer Potenz berechnet. Außerdem gilt die Definition: $a^0=1, a\neq 0$. Daraus folgt: Damit der Logarithmus 0 werden kann, muss der Term innerhalb des Logarithmus 1 sein!

Beispiel: f(x) = ln(4x + 5). Wir wollen die Nullstellen berechnen, also setzen wir:

ln(4x + 5) = 0 <=> 4x + 5 = 1 <=> x = -1.

Auch bei einer Logarithmusfunktion muss beachtet werden, dass sie nicht überall definiert ist. Hier gilt: log(a) ist nicht definiert für a $\leq$ 0. Die Berechnung des Definitionsbereiches kann daher ähnlich wie bei den Wurzelfunktionen erfolgen, nur dass statt „<“ das Zeichen „$\leq$“ zu setzen ist. Bei der obigen Funktion erhalten wir dann: ID_f = $\{x\in\mathbb{R}; x>-1,2\}$.

2.4 Nullstellen von Exponentialfunktionen

Dies ist der mit Abstand einfachste Fall, denn eine Exponentialfunktion kann nur dann Null werden, wenn die Basis bereits Null ist. Also gilt: f(x) = a^x $\neq$ 0 für alle a $\neq$ 0 und beliebige x und f(x) = a^x = 0 für a = 0 und beliebige x.

2.5 Nullstellen trigonometrischer Funktionen

Der sicherlich spannendste Fall der Nullstellenberechnung, denn wegen ihrer Periodizität hat jede trigonometrische Funktion unendlich viele Nullstellen. Herauszufinden ist lediglich eine dieser Nullstellen und die Periodenlänge. Letzteres ist einfach, wenn die trigonometrische Funktion nicht noch mit irgendeinem Faktor versehen wird, der für eine Streckung oder Stauchung sorgt. Ansonsten ist die Periodenlänge immer π.
Weiterhin muss bekannt sein, wann sin(x), cos(x) und tan(x) Null sind, dann lässt sich eine Menge der Nullstellen bestimmen.
Bekanntlich gilt: $\sin(x)=\frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$, $\cos(x)=\frac{Ankathete}{Hypotenuse}$ und $\tan(x)=\frac{Gegenkathete}{Ankathete}$.
Stellen wir uns nun dazu ein rechtwinkliges Dreieck vor, in dem der Winkel x links und der rechte Winkel dem x gegenüber liegt, so wird schnell klar, dass sin(0°) = tan(0°) = 0 sein muss, da dann die Gegenkathete genau 0 ist. Beim cos(x) dagegen wird die Ankathete 0, wenn der Winkel x 90° beträgt, also ist auch cos(90°) = 0. Nun entspricht 0° auch 0 im Bogenmaß und 90° ist $\frac{\pi}{2}$ (die Periodenlänge π entspricht 180° im Gradmaß). Daraus folgt:
sin(x) = 0, wenn $x\in\{...;-2\pi;-\pi;0;\pi;2\pi;...\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=k\bullet\pi, k\in\mathbb{Z}\}$,

tan(x) = 0, wenn $x \in \{...;-2\pi;-\pi;0;\pi;2\pi;...\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x = k \bullet \pi, k \in \mathbb{Z}\}$ und

cos(x) = 0, wenn $x \in \left\{...;-\frac{3}{2}\pi;-\frac{1}{2}\pi;\frac{1}{2}\pi;\frac{3}{2}\pi;...\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = \frac{2k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Beispiel: Die Nullstellen der Funktion cos(2x + 1) sollen bestimmt werden. Uns ist der oben beschriebene Sachverhalt bekannt, also setzen wir: 2x + 1 = $\frac{\pi}{2}$ <=> x = $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. Mit der Periodenlänge π folgt nun: f(x) = cos(2x + 1) = 0 für alle

$$x \in \left\{...;-\frac{7}{4}\pi-\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\pi-\frac{1}{2};...\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = \frac{4k+1}{4}\pi-\frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

3) Nullstellenberechnung durch Näherungsverfahren

Sind alle Ideen zur Nullstellenberechnung aufgebraucht, lässt sich auch Zuflucht in Näherungsverfahren zur Nullstellenermittlung nehmen. Dabei muss betont werden, dass es sich bei solchen Verfahren prinzipiell um numerische Verfahren handelt, d.h. in der Anwendung sollte zumindest ein programmierbarer Taschenrechner ins Spiel gebracht werden, da ansonsten die Berechnung sehr umständlich und langwierig werden kann.

3.1) Die Intervallhalbierungsmethode

Um diese Näherungsmethode in Anwendung zu bringen, sind eigentlich keinerlei Vorkenntnisse nötig; lediglich sollte Klarheit darüber herrschen, dass an einer Nullstelle die Funktion in der Regel einen Vorzeichenwechsel vornimmt (Ausnahme: bei einem Extrempunkt auf der x-Achse gibt es einen solchen Vorzeichenwechsel **nicht**, das heißt nichts anderes, als dass diese spezielle Art der Nullstelle mit der hier beschriebenen Methode nicht gefunden werden könnte.

Gehen wir also nun von einer Nullstelle mit Vorzeichenwechsel der Funktion aus, d.h. einer Nullstelle, bei der der Graph von f(x) entweder aus dem Positiven ins Negative läuft oder umgekehrt.
Zunächst müssen nun zwei x-Werte a und b ermittelt werden, zwischen denen das Vorzeichen von f(x) wechselt, also bei denen gilt: f(a) < 0 und f(b) >0 oder f(a) > 0 und f(b) < 0.
Wir halbieren das Intervall, setzen also m = 0,5(a + b) und berechnen f(m). Nun überprüfen wir, in welcher Intervallhälfte der Vorzeichenwechsel liegt und setzen im Fall der linken Hälfte b = m, im Fall der rechten Hälfte a = m. Danach wird wieder die Mitte bestimmt usw.

Eine Computerroutine zur Berechnung müsste etwa so aussehen:

1. Eingabe von f(x), a und b
2. m = 0,5(a + b)
3. Wenn (f(a) < 0 und f(m) > 0) oder (f(a) > 0 und f(m) < 0) dann setze b = m
   anderenfalls setze a = m
4. Abbruchbedingung: Ist f(m) genügend nahe an 0 dran? Z.B. gilt: f(m) < 10^{-8} ?
   Falls ja, ist die Nullstelle gefunden, setze x_n = m.
   Falls nein, geht es wieder bei 2. weiter.

Sehr simpel, aber auch sehr langwierig. Heutigen Computern darf diese Routine jedoch getrost zugemutet werden, die Berechnung dürfte nicht einmal einen Wimpernschlag dauern!

Selbst moderne grafikfähige Taschenrechner (GTR) könnten so programmiert werden und könnten recht schnell eine Lösung finden, doch ist das bei diesen Rechnern bekanntlich unnötig, da sie bereits Lösungsroutinen für die Nullstellenberechnung implementiert haben.
Sollte eine solche Routine jedoch ein Polynom verlangen und wir aber die Nullstellen einer nichtrationalen Funktion berechnen wollen, könnte eine kurze Programmierung Abhilfe schaffen.

3.2 Das Newtonverfahren

Diese Näherungsmethode verlangt bereits nach Methoden der Differenzialrechnung, denn wir müssen zur Berechnung neben der Funktion auch deren Ableitung kennen.
Beim Newtonverfahren wird davon ausgegangen, dass die Tangente an den Funktionalpunkt eines beliebigen Startwertes x eine Nullstelle aufweist, die näher an der gesuchten Nullstelle der Funktion liegt als der Startwert.
Das bedeutet: Wir geben einen beliebigen Startwert an und berechnen hierzu den Funktionswert und die Tangente an den so erhaltenen Punkt von f(x). Von dieser Tangente berechnen wir nun die Nullstelle und erhaltenen so den nächsten Näherungswert usw. Um die Tangente berechnen zu können, benötigen wir ihre Steigung, diese entspricht der Steigung der Funktion im Berührpunkt. Die Steigung der Funktion liefert wiederum ihre Ableitung, in die wir den Näherungs- bzw. Startwert einsetzen.

Rechnen wir das Verfahren einmal allgemein durch:
x_0 = Startwert, gegeben f(x) und f´(x). Der erste Punkt der Funktion lautet also (x_0 / $f(x_0)$), die Steigung in diesem Punkt ist $f´(x_0)$. Für die Tangentengleichung gilt y = mx + b, setzen wir für die Steigung m f´(x) ein und die x- und y- Koordinate des Berührpunktes, dann gilt bis hierhin:
$f(x_0) = f´(x_0) \bullet x_0 + b \iff b = f(x_0) - f´(x_0) \bullet x_0$ und damit ist die Gleichung der Tangente:
$t(x) = f´(x_0) \bullet x + f(x_0) - f´(x_0) \bullet x_0 \iff t(x) = f´(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Hiervon benötigen wir als nächsten Näherungswert die Nullstelle, also setzen wir gleich 0:

$$0 = f´(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \iff -f(x_0) = f´(x_0)(x - x_0) \iff -\frac{f(x_0)}{f´(x_0)} = x - x_0$$

$\iff x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f´(x_0)}$, dabei bedeutet x den neuen Näherungswert, mit dem nun wie vorher mit x_0 verfahren wird.

Um das Newtonverfahren zu programmieren, sind daher diese Schritte zu befolgen:

1. Eingabe von f(x) und f´(x) und Eingabe des Startwertes x_0. (Soll das Programm selbst die Ableitung berechnen, kann hierdurch die Komplexität der Programmierung beliebig gesteigert werden – für eine schnelle Berechnung sollte daher auf solche Feinheiten verzichtet werden, das ist etwas für Spezialisten!)
2. $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f´(x_0)}$
3. Abbruchbedingung: Ist f(x) genügend nahe an 0, z.B. ist $f(x) < 10^{-8}$?
   Falls ja, ist die Nullstelle mit x gefunden und kann angezeigt werden.
   Falls nein, setze $x_0 = x$ und gehe wieder zu 2.

Wir erkennen, dass nach Abhandlung der Theorie eine sehr einfache Routine herauskommt, die sich schnell programmieren lässt. Um Das Programm möglichst einfach zu halten, sollte sowohl f(x) als auch f´(x) direkt in die Programmierung geschrieben werden, dann kann nämlich auch auf eine Eingaberoutine verzichtet werden, die viel länger wäre als die eigentliche Berechnung!

Achtung: Manchmal kann der Startwert so ungünstig gewählt sein, dass das Newtonverfahren sich „aufhängt“, also auffällig viele Berechnungsschritte benötigt, ohne auf eine Lösung zu kommen. Das kann z.B. passieren, wenn der gewählte Startwert sehr nahe an einer Extremstelle liegt, die zugehörige Tangente daher eine Steigung nahe 0 hat. Dem kann entgegen gewirkt werden, indem eine einfache Zählvariable bei der Berechnung mitläuft und eine Kontrollabfrage eingebaut wird in der Art „Hat es bereits 30 (als Beispiel) Rechenschritte gegeben? Dann besser Bescheid geben und einen anderen Startwert verlangen!“.
Das kommt zwar nicht so oft vor, ist aber auch nicht ausgeschlossen und: sicher ist sicher!

Beispiel: $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1 = 0$. Diese Funktion hat nur eine nicht ganzzahlige Nullstelle, die nur über ein Näherungsverfahren berechnet werden kann.
Wir wählen das Newtonverfahren und berechnen dazu zunächst die Ableitung:
$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

Für einen Startwert $x_0 = 1$ erhalten wir: $f(1) = 2$ und $f'(1) = 6$. Die Tangente ist $t_0(x) = 6x - 4$ (rote Gerade), wir erkennen: die Nullstelle dieser Tangente liegt näher an der Nullstelle von f(x) als der Funktionswert des Startwertes, diese Nullstelle ist unser nächster Näherungswert: $x_1 = \frac{2}{3}$.

Nun gilt weiter: $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{11}{27}$ und $f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{11}{3}$ und damit die Tangente $t_1(x) = \frac{11}{3}x - \frac{55}{27}$ (grüne Gerade), deren Nullstelle noch näher an der gesuchten Nullstelle von f(x) liegt usw.
Schließlich liefert das Newtonverfahren (Abbruchbedingung: $f(x) < 10^{-8}$) nach 6 Rechenschritten die Nullstelle $x = 0{,}5436890127$.