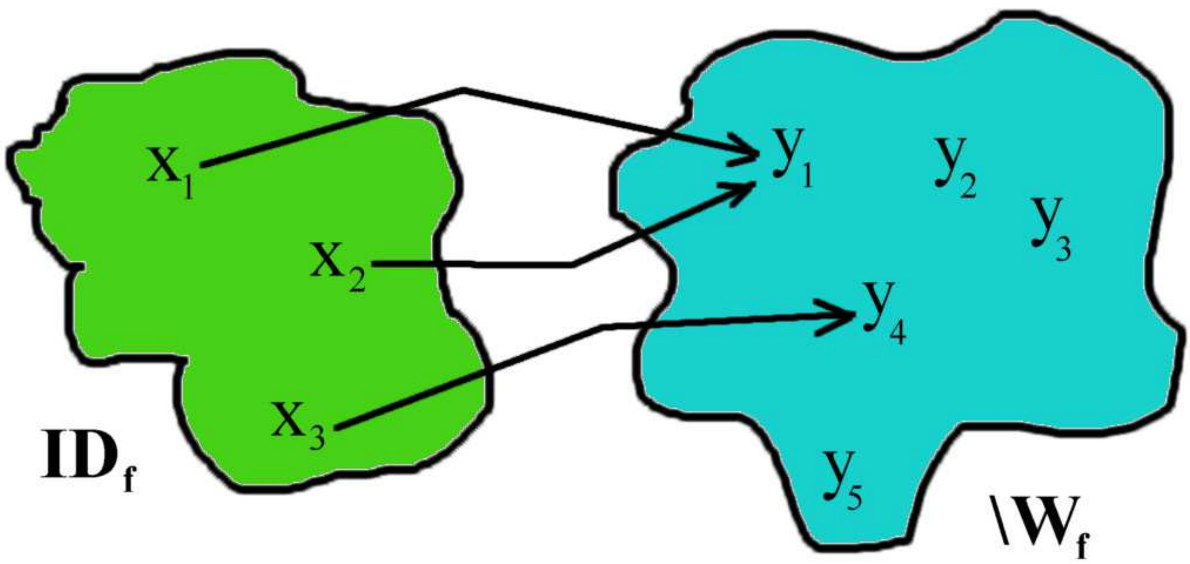
Lektion 7: Einführung in den Funktionsbegriff

Definition 1: Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung. Jedem Wert des Definitionsbereiches ID$_f$ der Funktion (meistens die „Menge der x-Werte“) wird genau ein Wert des Wertebereiches \W$_f$ der Funktion (meistens die „Menge der y-Werte“) zugeordnet.

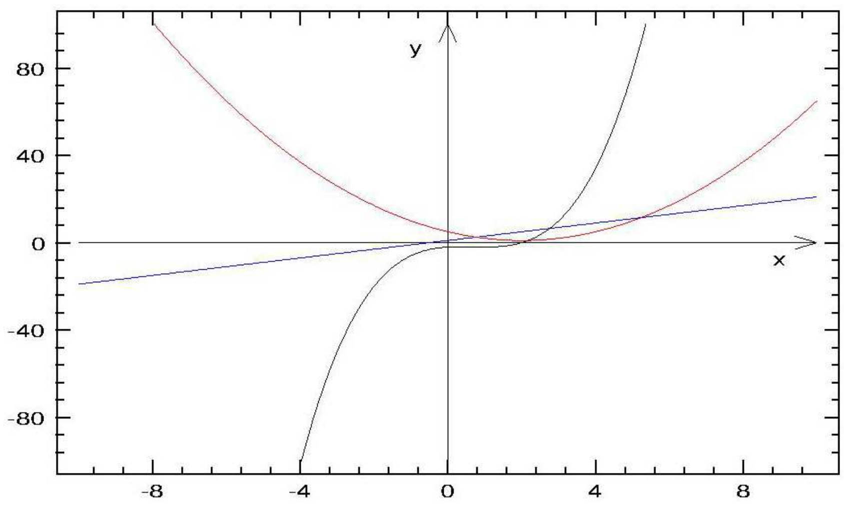
Im Detail bedeutet das folgendes:

- Aus dem Definitionsbereich darf kein einziger Wert existieren, dem kein Wert des Wertebereiches zugeordnet wird
- Keinem einzigen Wert des Definitionsbereiches darf mehr als ein Wert des Wertebereiches zugeordnet werden
- Es darf Werte des Wertebereiches geben, die mehr als einem Wert des Definitionsbereiches zugeordnet werden
- Es dürfen Werte des Wertebereiches existieren, die nicht zugeordnet werden

Das folgende Schaubild verdeutlicht den Zusammenhang:



typische Funktionen können so aussehen:

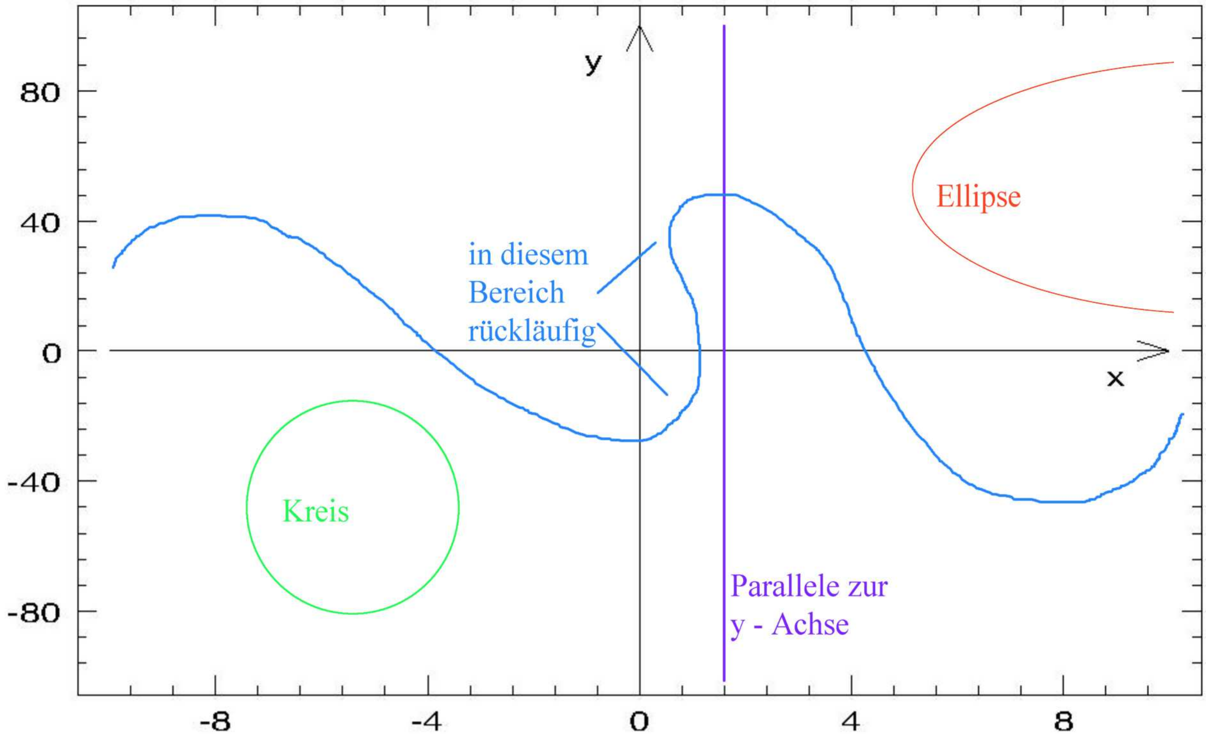


- lineare Funktion

- quadratische Funktion

- ganzrationale Funktion 3. Grades

Dagegen zeigt das folgende Koordinatensystem Beispiele, die der Definition der Funktion widersprechen, da es Bereiche des Definitionsbereiches gibt, zu denen keine Zuordnung erfolgt bzw. solche, bei denen mehr als nur ein Wert des Wertebereiches zugeordnet wird:



Um vernünftig mit dem Funktionsbegriff umgehen zu können, müssen noch ein paar Begriffe definiert werden:

Definition 2: Wenn eine Funktion als Funktionsterm ein **Polynom** hat, so sprechen wir von einer **ganzrationalen Funktion.** Ein solches Polynom ist ein Funktionsterm der Art:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad ; a_0 , \ldots , a_n \in \mathbb{R} , n \in \mathbb{N} .$

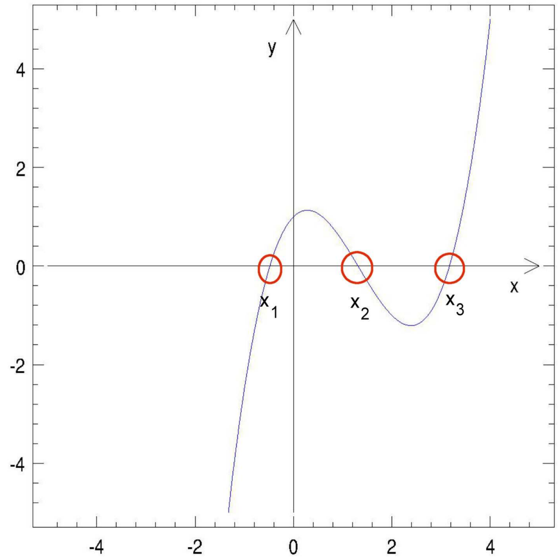
Also gilt: bei einer ganzrationalen Funktion **darf die Funktionsvariable nicht**:

- im Nenner eines Bruches stehen (**gebrochen rationale Funktion**)
- im Exponenten stehen (**Exponentialfunktion**)
- unter einer Wurzel stehen (**irrationale oder Wurzelfunktion**)
- im Sinus, Cosinus oder Tangens stehen (**trigonometrische Funktion**)
- im Logarithmus stehen (**Logarithmusfunktion**)

Definition 3: Der **Grad** einer ganzrationalen Funktion entspricht dem Exponenten der höchsten Potenz der Funktionsvariable.

Bsp.: f(x) in der Definition 2 hat den Grad n.
$g(x) = a^3x - b^2x^4 + c^6x^2 + d^8x^3$ hat den Grad 4, denn die Funktionsvariable ist x.
$h(c) = a^3x - b^2x^4 + c^6x^2 + d^8x^3$ hat den Grad 6, denn die Funktionsvariable ist c.

Definition 4: Die **Nullstellen (Abk.: NST)** einer Funktion sind die Schnittstellen ihres Funktionsgraphen mit der x-Achse, also die Stellen, an denen f(x) = y = 0 gilt.



Nebenstehende Abbildung zeigt eine ganzrationale Funktion mit 3 Nullstellen.

Wir sehen:

Es gilt $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$.

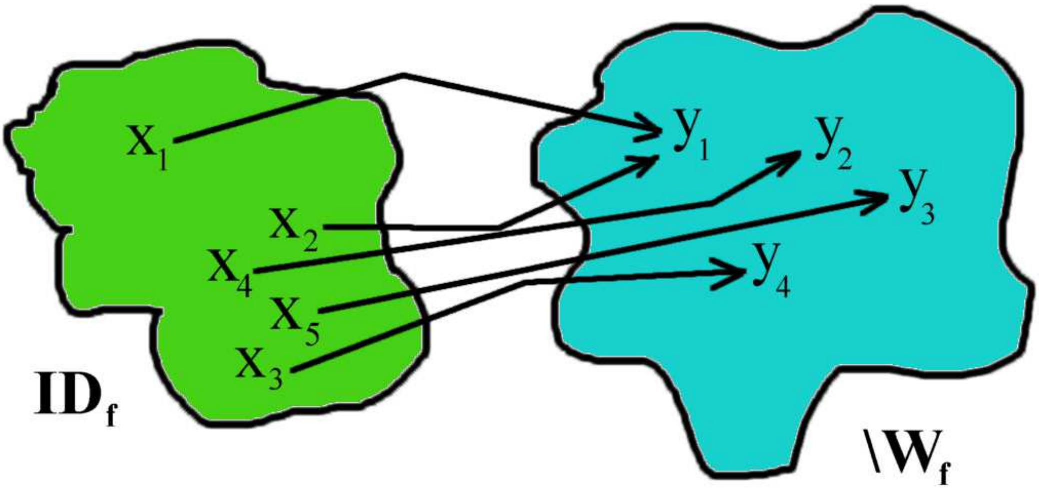
Für ganzrationale Funktionen gilt außerdem der

Fundamentalsatz der Algebra:
Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat höchstens n reelle Nullstellen (bzw. hat genau n komplexe Nullstellen).

Funktionen mit besonderen Eigenschaften

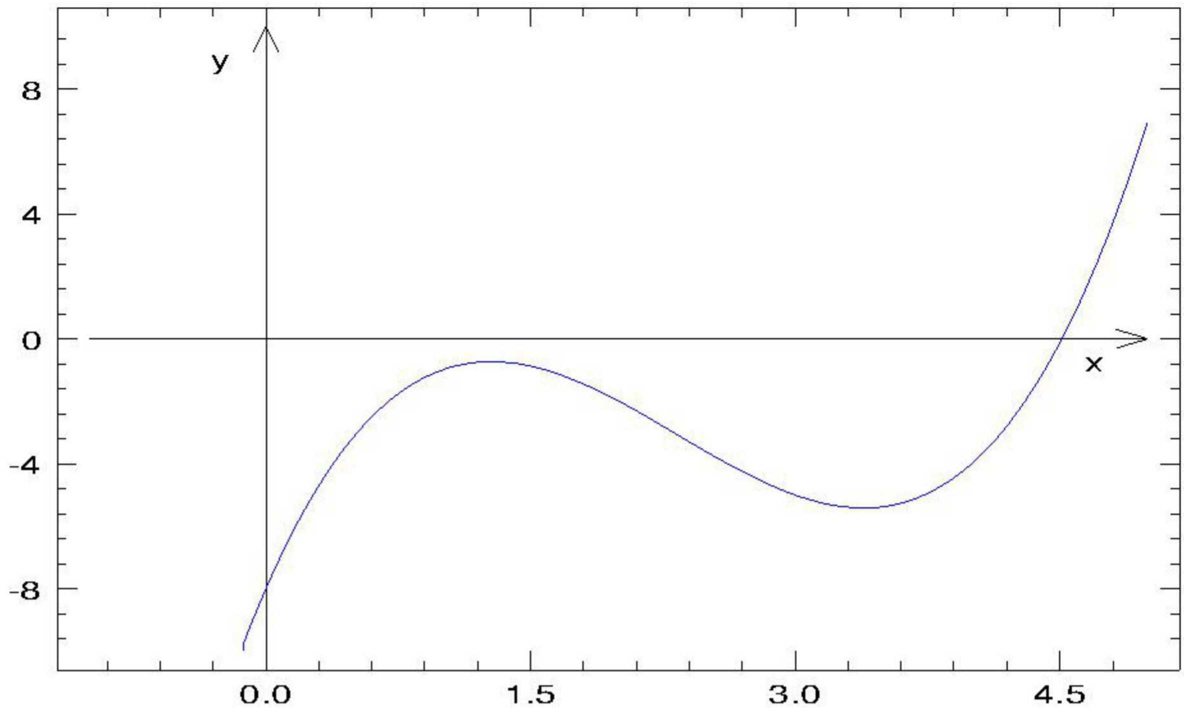
Es gibt Funktionen, die neben der Funktionsdefinition noch weitere Eigenschaften erfüllen. Diese sollen nun vorgestellt werden.

Die surjektive Funktion:
Eine Funktion heißt surjektiv, wenn jeder Wert des Wertebereiches mindestens einem Wert des Definitionsbereiches zugeordnet wird. In mathematischer Formulierung sieht diese Bedingung so aus: $f: X \to Y$ surjektiv $\Leftrightarrow \quad \forall y \in Y \quad \exists x \in X, f(x) = y$.
Im Schaubild sieht das so aus:

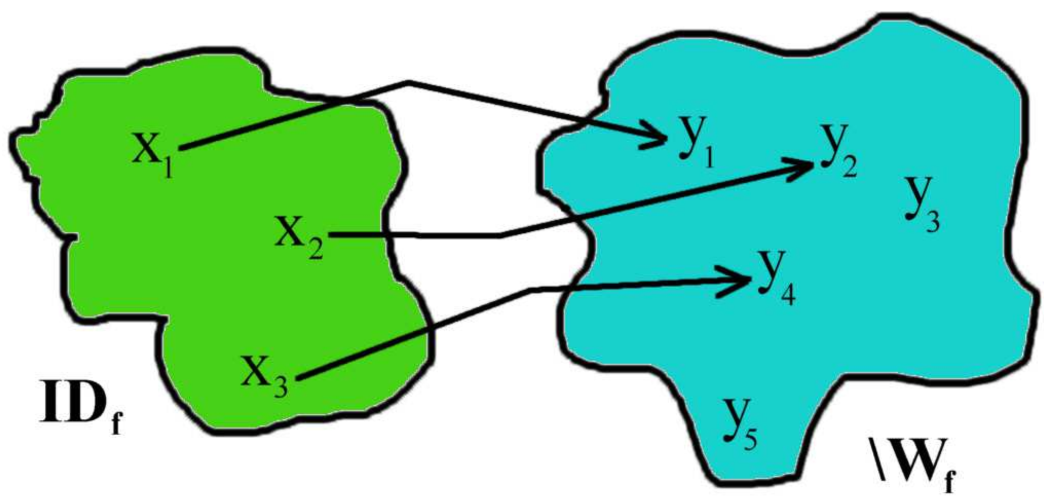


Man beachte: Es gibt keinen y-Wert des Wertebereiches, der keinem x-Wert des Wertebereiches zugeordnet wird und y_1 wird den beiden x-Werten x_1 und x_2 zugeordnet.

Beispiel einer surjektiven Funktion:

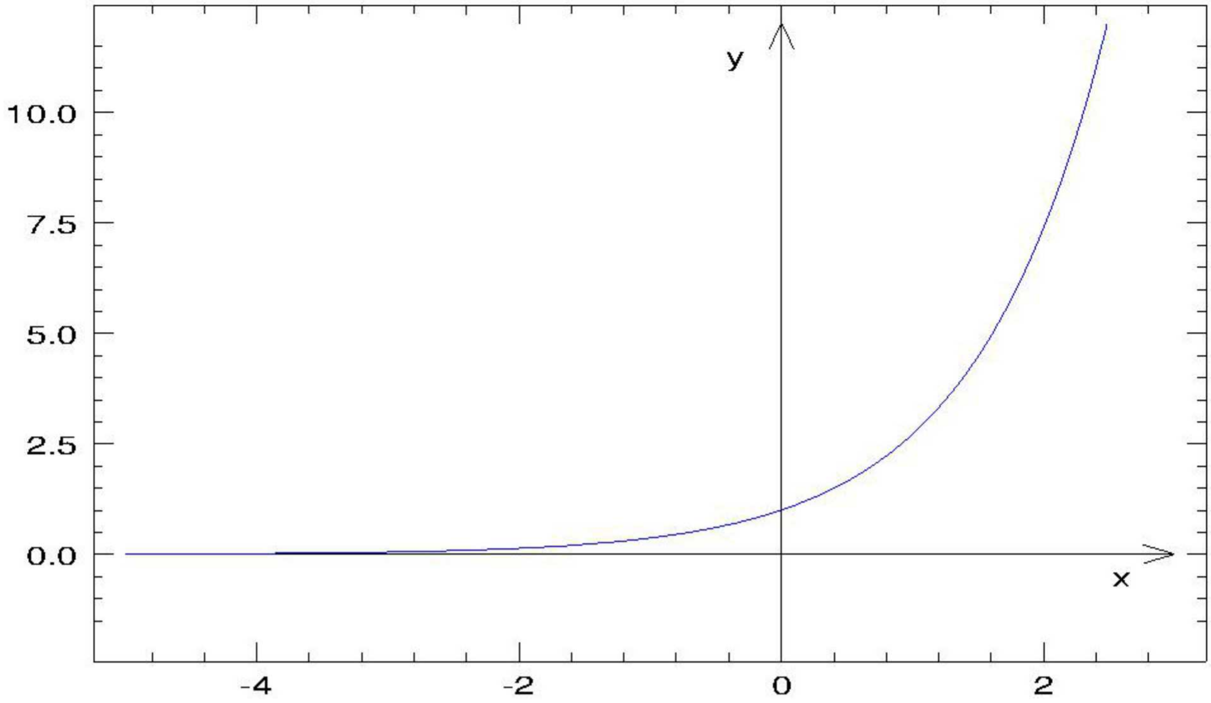


Die injektive Funktion:
Eine Funktion heißt injektiv, wenn jeder zugeordnete y-Wert des Wertebereiches <u>nur genau einem</u> x-Wert des Definitionsbereiches zugeordnet wird. Auch diese Bedingung in mathematischer Formulierung: $\forall x_1, x_2 \in ID_f, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Schaubild:

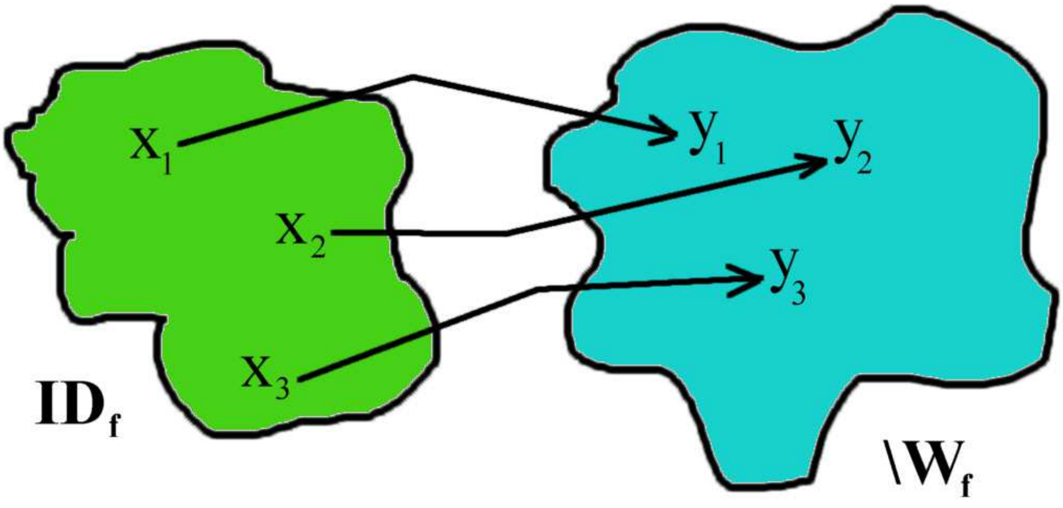


Man beachte: Es gibt y-Werte des Wertebereiches, die nicht zugeordnet werden und jeder zugeordnete y-Wert gehört zu genau einem x-Wert des Definitionsbereiches.

Beispiel einer injektiven Funktion:

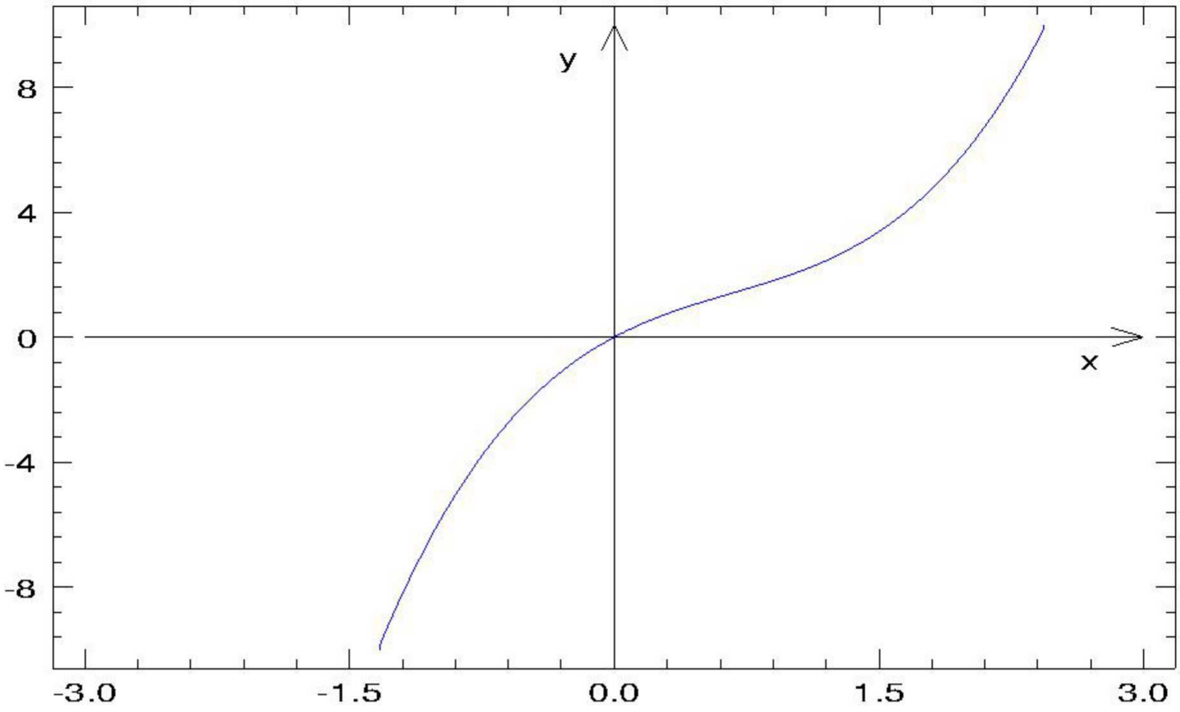


Die bijektive Funktion:
Eine Funktion heißt bijektiv, wenn sie zugleich surjektiv und injektiv ist.
Im Schaubild:



Man beachte: <u>jeder</u> y-Wert des Wertebereiches wird <u>genau einem</u> x-Wert des Definitionsbereiches zugeordnet.

Beispiel einer bijektiven Funktion:



<u>Hausaufgabe 1. Teil:</u> Lerne alle Definitionen und Sätze und ihre Bedeutung!

<u>Anwendung der Funktionsbegriffe:</u>

Beurteile (Begründet!) bei den folgenden Zuordnungen, ob es sich jeweils um eine Funktion handelt. Falls ja: ist diese Funktion sogar surjektiv, injektiv oder bijektiv?

a) Bei Köln wird seit vielen Jahren der Pegelstand des Rheins gemessen. Ordne dem Datum (Tag-Monat-Jahr) den jeweiligen Pegelstand zu!

b) Der Mond umkreist die Erde in einer elliptischen Umlaufbahn. Ordne dem Datum (Tag-Monat) den jeweiligen Abstand Mond-Erde zu!

c) Der Mond umkreist die Erde in einer elliptischen Umlaufbahn. Ordne dem Datum (Tag-Monat-Jahr und Uhrzeit) des Jahres 2014 den jeweiligen Abstand Mond-Erde zu!

d) Der Mond umkreist die Erde in einer elliptischen Umlaufbahn. Ordne dem Datum (Tag-Monat-Jahr und Uhrzeit) des Februars 2014 den jeweiligen Abstand Mond-Erde zu!

e) Beim Joggen: ordne der Zeit, die du unterwegs bist, die jeweilige Herzfrequenz zu!

f) Beim Joggen: ordne der Zeit, die du unterwegs bist, den Gesamtkalorienverbrauch zu!

<u>Hausaufgabe 2. Teil:</u> Formuliere weitere 6 Zuordnungen und beurteile (Begründet!), ob es sich jeweils um eine Funktion handelt und sogar um eine der speziellen Funktionen!

