<u>Lektion 5: lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme, Teil II</u>

Bisher haben wir uns mit dem Aufstellen und Lösen linearer Gleichungen beschäftigt, der absoluten Basiswissenschaft der Algebra. Kniffliger wird die Sache, wenn ein Problem sich nicht mehr unter Verwendung nur einer Variablen umschreiben lässt. Hierfür ein Beispiel:

Herbert hat für seine Geburtstagsparty 24 Flaschen Rot- und Weißwein gekauft und dafür insgesamt 112 Euro ausgegeben. Der Rotwein kostete 5 Euro, der Weißwein 4 Euro pro Flasche. Wie viele Flaschen jeder Sorte waren es?

Stellen wir uns etwas geschickt an, werden wir auch für diese Aufgabe lediglich nur eine Variable benötigen. Schematisch gehen wir dazu so vor:

x = Anzahl der Rotweinflaschen
24-x = Anzahl der Weißweinflaschen (da es ja insgesamt 24 Flaschen waren)

Es folgt die Gleichung: $5x + 4(24-x) = 112 \Leftrightarrow 5x + 96 - 4x = 112 \Leftrightarrow x = 16$

Also hat Herbert 16 Flaschen Rotwein und somit 8 Flaschen Weißwein gekauft.

Am selben Beispiel sehen wir uns nun an, wie die Aufgabe unter Verwendung von 2 Variablen gelöst werden kann, wir stellen ein **lineares Gleichungssystem** auf:

x = Anzahl der Rotweinflaschen
y = Anzahl der Weißweinflaschen
Insgesamt waren es 24 Flaschen, also ist die 1. Gleichung: $x + y = 24$.
Jede Flasche Rotwein kostete 5 Euro, jede Flasche Weißwein 4 Euro, zusammen waren es 112 Euro; daraus folgt die 2. Gleichung: $5x + 4y = 112$.
Wir erhalten das lineare Gleichungssystem: $\left| \begin{matrix} x + y = 24 \\ 5x + 4y = 112 \end{matrix} \right|$. Die Gleichungen, die zum Gleichungssystem gehören, werden durch die „Betragsstriche“ als zusammen gehörig gekennzeichnet.

Wie wird ein solches lineares Gleichungssystem gelöst?

<u>Gleichungssysteme mit 2 Variablen und 2 Gleichungen</u>

Dieser Fall, zu dem auch das oben beschriebene Beispiel gehört, ist der einfachste Fall und wir können hier 3 Verfahren zur Lösung einsetzen; jedes dieser Verfahren führt zum Ziel, jedoch ist nicht jedes Verfahren gleich gut geeignet. Im Folgenden soll beschrieben werden, wie die Verfahren funktionieren und wann das jeweilige Verfahren 1. Wahl ist, um das Gleichungssystem zu lösen.

a) Einsetzungsverfahren: Dieses Verfahren wird dann angewendet, wenn eine der Gleichungen bereits nach einer Variable umgestellt ist oder nach einem Term umgestellt ist, der in dieser Form identisch in der 2. Gleichung auftaucht. Ebenso kann das Verfahren gewählt werden, wenn die passende Umstellung einfach zu berechnen ist und die weiter unten geschilderten Verfahren umständlicher erscheinen.

Beispiel: $\begin{vmatrix} y = 4x + 1 \\ 3x - 2y = 10 \end{vmatrix}$. In der 1. Gleichung steht, welcher Term mit der Variablen x der Variablen y entspricht, also können wir die rechte Seite der 1. Gleichung an Stelle der Variablen y in die 2. Gleichung einsetzen. Wir erhalten:

$$\begin{vmatrix} y = 4x + 1 \\ 3x - 2(4x + 1) = 10 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y = 4x + 1 \\ 3x - 8x - 2 = 10 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y = 4x + 1 \\ -5x = 12 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y = 4x + 1 \\ x = -\frac{12}{5} \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y = 4 \bullet \left(-\frac{12}{5} \right) + 1 \\ x = -\frac{12}{5} \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y = -\frac{43}{5} \\ x = -\frac{12}{5} \end{vmatrix}; IL = \left\{ \left(-\frac{12}{5}; -\frac{43}{5} \right) \right\}$$

Natürlich ist es etwas umständlich, immer die Gleichung mit abzuschreiben, die nicht verändert wurde; ob man seinen Lösungsweg derart ausführlich notieren möchte, ist Geschmackssache. Allerdings wird der Weg häufig genau so verlangt!
Da es eine eindeutige Lösung für beide Variablen gibt, müssen auch diese beiden Lösungen in der Lösungsmenge genannt werden. Zur Kennzeichnung ihrer Zusammengehörigkeit werden beide zusammen in einer Klammer innerhalb der Mengenklammer angegeben und durch ein Semikolon „{(...;...)}“ oder durch einen Schrägstrich „{(.../...)}“ voneinander getrennt. Die Reihenfolge entspricht der alphabetischen Anordnung.

b) Gleichsetzungsverfahren: Steht bei beiden Gleichungen auf einer Seite des Gleichheitszeichens die gleich Variable oder der gleiche Term? Dann könnte dieses Verfahren den besten Lösungsansatz bieten! Selbstverständlich gilt das auch für den Fall, die geschilderte Situation durch eine einfache Umstellung einer Gleichung erhalten zu können.

Beispiel: $\begin{vmatrix} 5x = 6y - 3 \\ 5x = 10 - 4y \end{vmatrix}$. Da bei beiden Gleichungen links der gleiche Term steht, muss offenbar 6y-3 das Gleiche sein wie 10-4y. Es gilt daher die Gleichung:
6y-3 = 10-4y <=> 10y = 13 <=> y = 1,3. Diese Lösung können wir nun in die 1. oder in die 2. Gleichung einsetzen (wer möchte, zur Kontrolle auch in beide Gleichungen), bei beiden erhalten wir das gleiche Ergebnis für x. Wählen wir z.B. die 2. Gleichung aus:
5x = 10 - 4·1,3 <=> 5x = 10 - 5,2 <=> 5x = 4,8 <=> x = 0,96; IL = {(0,96;1,3)}.

c) Additions-/Subtraktionsverfahren: Bei diesem Verfahren nutzen wir die Tatsache aus, dass eine Gleichung nicht nur durch Addition/Subtraktion/Multiplikation/Division mit einer Zahl oder einem Term äquivalent umgeformt werden kann, sondern ebenso handelt es sich um eine Äquivalenzumformung, wenn ganze Gleichungen miteinander addiert oder voneinander subtrahiert werden. Dabei ist es ganz egal, welche Seite der einen Gleichung jeweils zur linken bzw. rechten Seite der anderen Gleichung addiert/subtrahiert wird, denn **schließlich gilt ja nun einmal die Gleichheit**! Sinn macht die ganze Rechnung jedoch nur dann, wenn nach Addition/Subtraktion in der so bearbeiteten Gleichung eine Variable eliminiert worden ist und nur noch die andere Variable übrig ist. Um dieses Ziel erreichen zu können, ist es häufig notwendig, zunächst die Gleichungen durch geeignete Multiplikation aneinander anzupassen.

Beispiel: $\begin{vmatrix} 4x-3y=10 \\ 2x+6y=20 \end{vmatrix}$. Wir multiplizieren zunächst die obere Gleichung mit 2 und addieren anschließend beide Gleichungen, dadurch wird die Variable y eliminiert: $\begin{vmatrix} 4x-3y=10 \\ 2x+6y=20 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 8x-6y=20 \\ 2x+6y=20 \end{vmatrix} + \Leftrightarrow 10x=40 \Leftrightarrow x=4$. Diese Lösung kann nun wieder in eine der beiden Ausgangsgleichungen eingesetzt werden, um so auch y zu berechnen. Wählen wir z.B. die 2. Gleichung, erhalten wir: 2·4 +6y = 20 <=> 8 + 6y = 20 <=> 6y = 12 <=> y = 2; IL={(4;2)}.

Um es noch einmal ganz deutlich zu sagen: Bei allen drei Verfahren wird durch ihre Anwendung eine Variable eliminiert und eine Gleichung mit nur noch einer Variable erhalten. Diese können wir lösen und durch Einsetzen des Ergebnisses in eine Ausgangsgleichung die zweite Variable ebenfalls berechnen. Wird durch Einsetzen, Gleichsetzen oder Addieren/Subtrahieren nicht eine erste Variable eliminiert, ist das Verfahren falsch angewendet worden und nützt nichts bei der Berechnung des Gleichungssystems!

<u>Lineare Abhängigkeit der Gleichungen und sich widersprechende Gleichungen</u>

Gelegentlich kommt es vor, dass nach Äquivalenzumformung des Gleichungssystems beide Gleichungen identisch sind bzw. man erkennt, dass die eine Gleichung durch Äquivalenzumformung der anderen Gleichung aus dieser hervorgeht. In diesem Fall nennt man die beiden Gleichungen **linear abhängig** voneinander. Da nunmehr immer noch 2 Variablen vorhanden sind, jedoch effektiv nur noch eine Gleichung zur Lösung zur Verfügung steht, hat das Gleichungssystem **unendlich viele** Lösungen, wobei jedoch die beiden Variablen voneinander abhängen. Diese Abhängigkeit der Variablen ist in der Lösungsmenge aufzuführen.

Beispiel: $\begin{vmatrix} 3x-4y=20 \\ 6x=40+8y \end{vmatrix}$. Addiert man in der 1. Gleichung 4y und multipliziert die Gleichung anschließend mit 2, erhält man exakt die 2. Gleichung. Effektiv steht zur Lösung dieses Gleichungssystems also nur die Gleichung 6x = 40 + 8y zur Verfügung. Wir teilen diese Gleichung durch 6 und erhalten $x=\frac{20}{3}+\frac{4}{3}y$. Durch diese Beziehung wird die Abhängigkeit der Variablen x von der Variablen y beschrieben. Die Lösungsmenge enthält unendlich viele Lösungen, es gilt: $IL=\left\{x,y\in\mathbb{R}\,/\,x=\frac{20}{3}+\frac{4}{3}y\right\}$. Also ist die Lösungsmenge die „Menge mit den Elementen x und y aus den reellen Zahlen, für die weiterhin gelten muss, dass $x=\frac{20}{3}+\frac{4}{3}y$." Ist z.B. y = 2, folgt x $=\frac{20}{3}+\frac{4}{3}\bullet 2=\frac{28}{3}$, eine mögliche Lösung ist also $\left(\frac{28}{3};2\right)$.
Gleichungssysteme, bei denen eine lineare Abhängigkeit unter den Gleichungen besteht, so dass effektiv mehr Variablen als Gleichungen vorhanden sind, nennt man auch **unterbestimmte Gleichungssysteme.**

Neben der oben geschilderten Besonderheit ist es auch möglich, dass **beide Gleichungen sich widersprechen**. In einem solchen Fall ist das Gleichungssystem **unlösbar.**

Beispiel: $\begin{vmatrix} 2x+3y=10 \\ 4x+6y=25 \end{vmatrix}$. Multiplizieren wir die obere Gleichung mit 2, erhalten wir eine Gleichung, die auf der linken Seite der unteren entspricht, aber auf der rechten ein anderes

Ergebnis hat: $\begin{vmatrix} 4x+6y=20 \\ 4x+6y=25 \end{vmatrix}$. Das kann offenbar nicht sein, eine Tatsache, die noch deutlicher wird, indem man z.B. die obere Gleichung von der unteren subtrahiert:

$\begin{matrix} I \\ II \end{matrix}\begin{vmatrix} 4x+6y=20 \\ 4x+6y=25 \end{vmatrix}_{-I} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4x+6y=20 \\ 0=5 \end{vmatrix}$. Wir erkennen den offensichtlichen Widerspruch in der unteren Gleichung, dieses Gleichungssystem kann keine Lösung haben, also: IL = {}.

Hausaufgabe 1. Teil: Lerne die Lösungsverfahren zum Lösen von Gleichungssystemen aus 2 Gleichungen mit 2 Variablen!

Anwendung: Aufstellen und Berechnen von Gleichungssystemen

gemeinsame Arbeit:

1) Löse die Gleichungssysteme mit einem geeigneten Lösungsverfahren:

a) $\begin{vmatrix} 5x-3y=14 \\ 8x-6y=22 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2a=7b+1 \\ 5b=4a-6 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3u+4=7v-9 \\ 9u+12=10-5v \end{vmatrix}$

2) Wird zum Fünffachen einer Zahl das Doppelte einer anderen Zahl addiert, so erhält man 30. Andererseits ergibt das Dreifache der zweiten Zahl vermindert um die Hälfte der ersten Zahl 10.

Hausaufgabe 2. Teil: Löse die folgenden Aufgaben!

1) Begründe bei den folgenden Gleichungssystemen, welches Lösungsverfahren du anwendest und bestimme die Lösungsmenge:

a) $\begin{vmatrix} 12-4a=2b+1 \\ 4b-6=6a+9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 8x+y=15 \\ 5x-2y=12 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4+3m=4n \\ 2m-3=2n+1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 4s+3t=6 \\ 5s-2t=-10 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3p+1=4q-3 \\ 3p-10=5+3q \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 4x-2=5y+1 \\ x+3=1,25y-6 \end{vmatrix}$

2) Stelle jeweils das Gleichungssystem auf und löse es; gib die Lösungsmenge an:

a) Peter und Uli spielen Elfmeterschießen. Zusammen erzielen sie 47 Treffer, dabei hat Peter 7 Treffer mehr erzielt als Uli.

b) Wird eine Zahl um 3 vermindert und das Ergebnis verdreifacht, so erhält man eine zweite Zahl, zu der 8 addiert wurde. Wird das Vierfache der ersten Zahl vom Neunfachen der zweiten Zahl abgezogen, so erhält man 24.

c) Ein Schnappsbrenner stellt Weinbrand und Weizenkorn her, insgesamt würde er 500 Liter erhalten, wenn er doppelt so viel Korn gebrannt hätte und viermal so viel Weinbrand. Andererseits bekäme er nur 50 Liter Schnapps, wenn er von der dreifachen Kornmenge die zweifache Weinbrandmenge abziehen würde. Ist das überhaupt möglich?