Lektion 3: Potenzrechnung

Die Potenzschreibweise ist nichts anderes als eine abkürzende Schreibweise für Produkte mit immer gleichbleibenden Faktoren. Statt also nun beispielsweise $a \bullet a \bullet a \bullet b \bullet b \bullet b \bullet b$ zu notieren, was ja recht umständlich ist, lässt sich der Term verkürzt durch $a^3 \bullet b^4$ darstellen oder noch einfacher durch $a^3 b^4$, **da der Malpunkt zwischen Variablen und zwischen einer Zahl und einer Variable weggelassen werden darf**.

Es gilt daher: $a^n = \underbrace{a \bullet a \bullet ... \bullet a}_{n-mal}$. Bezeichnung: a^n heißt **Potenz**, a ist die **Basis**, n der **Exponent (oder die Hochzahl)** der Potenz.

Regeln der Potenzrechnung:

Die ersten 3 sehr wichtigen Regeln der Potenzrechnung sind Definitionen und als solche nicht herleitbar. Alle übrigen Regeln sollen jeweils anhand eines einfachen Beispiels ermittelt werden, was zeigt, dass jederzeit bei Unkenntnis der Regeln diese einfach hergeleitet werden können! Bei Unsicherheit ist das auch immer zu bevorzugen, um die „beliebte“ Verwechslung der Regel zur Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis mit der zum Potenzieren einer Potenz auszuschließen.

0) $a^0 = 1$; dabei ist a beliebig, darf aber nicht 0 sein, denn „0^0“ ist nicht definiert!

1) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Damit gilt dann auch: $\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = 1 \bullet \frac{a^n}{1} = a^n$.

2) $\sqrt[n]{a^b} = a^{\frac{b}{n}}$. Damit gelten alle Regeln der Potenzrechnung auch für Wurzeln!

Bsp.: $\sqrt{a^3} = \sqrt[2]{a^3} = a^{\frac{3}{2}} = a^{1,5}$

3) Multiplikation:

a) Von Potenzen mit gleicher Basis: $a^3 \bullet a^2 = aaa \bullet aa = aaaaa = a^5 = a^{3+2}$.
Also folgt die Regel: $a^u \bullet a^v = a^{u+v}$, d.h. **Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert**.

b) Von Potenzen mit gleichen Exponenten:
$a^3 \bullet b^3 = aaa \bullet bbb = aaabbb = ababab = (ab)(ab)(ab) = (ab)^3$.
In der vorstehenden Rechnung wurden das Kommutativ- und das Assoziativgesetz angewendet!
Es folgt die Regel: $a^u \bullet b^u = (ab)^u$, d.h. **Potenzen mit gleichen Exponenten werden Multipliziert, indem man die Basen miteinander multipliziert.**

4) Division:

a) Von Potenzen mit gleicher Basis: $a^3 : a^2 = \frac{a^3}{a^2} = \frac{aaa}{aa} = \frac{a}{1} = a = a^1 = a^{3-2}$.

Außerdem gilt: $a^2 : a^3 = \frac{aa}{aaa} = \frac{1}{a} = \frac{1}{a^1} = a^{-1}$ (vgl. hierzu Regel 1).

Daher gilt die Regel: $a^u : a^v = \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$, d.h. **Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten voneinander subtrahiert.**

b) Von Potenzen mit gleichen Exponenten:

$a^3 : b^3 = \frac{a^3}{b^3} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a}{b} \bullet \frac{a}{b} \bullet \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = (a:b)^3$. In dieser Rechnung taucht ein wenig Bruchrechnung auf!

Regel: $a^u : b^u = \frac{a^u}{b^u} = \left(\frac{a}{b}\right)^u = (a:b)^u$, d.h. **Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die Basen durcheinander dividiert.**

5) Potenzieren von Potenzen: $(a^3)^2 = a^3 \bullet a^3 = aaa \bullet aaa = aaaaaa = a^6 = a^{3\bullet 2}$.

Regel: $(a^u)^v = a^{u \bullet v}$, d.h. **Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.**

Leicht erkennt man das Verwechslungspotential zwischen den Regeln 3a) und 5)! Daher gilt wie immer: Regeln merken, gerne auch auswendig lernen, aber dann richtig! Auswendig gelernte Regeln ohne Verständnis der Regeln bringen nichts und werden schnell wieder vergessen oder verwechselt, wie dieses Beispiel zeigt.

6) Addition/Subtraktion von Potenzen: Diese Regel wird gerne weggelassen, wenn es um die Potenzrechnung geht, dabei ist sie sehr wichtig und soll hier ganz klar und deutlich wiedergegeben werden:

Potenzen lassen sich nur dann addieren/subtrahieren, wenn sie in Basis und Exponent übereinstimmen.

Bsp.: $2a^3 + 4a^5 – 8a^2 + 3a^5 – 5a^3 + 6a^4 – 2a^5 + 5a^2$

$= 4a^5 + 3a^5 – 2a^5 + 6a^4 + 2a^3 – 5a^3 – 8a^2 + 5a^2$ (Anwendung des Kommutativgesetzes)

$= (4 + 3 – 2)a^5 + 6a^4 + (2 – 5)a^3 + (-8 + 5)a^2$ (Anwendung des Distributivgesetzes)

$= 5a^5 + 6a^4 – 3a^3 – 3a^2$.

Hausaufgabe 1. Teil: Alle Regeln der Potenzrechnung müssen 100%ig sicher beherrscht werden!

Mit der Potenzrechnung lassen sich nette Zahlenspielereien betreiben. Ein Beispiel:

Wie lautet die größte aus 3 Ziffern darstellbare Zahl?

Ohne Weiteres kommt man auf 999 oder 99^9 oder 9^{99}, wobei letztere auch wirklich schon sehr groß ist. Aber wie sieht es mit „9^{9^9}“ aus? Diese Darstellung muss in Anführungszeichen gesetzt werden, weil eine Notation dieser Art mathematisch nicht definiert ist, es müssen in jedem Fall Klammern gesetzt werden! Dafür gibt es nun 2 Möglichkeiten:

$(9^9)^9 = 9^{9\bullet 9} = 9^{81} < 9^{99}$ und die Variante

$9^{(9^9)} = 9^{387420489}$. Ohne jeden Zweifel ist dies die (mit Abstand) größte aus 3 Ziffern darstellbare Zahl, sie hat tatsächlich 369693100 Stellen!

Um diese Zahl aufzuschreiben, würde man, vorausgesetzt, **man schreibt 8 Stunden am Tag 365 Tage im Jahr und schafft 2 Ziffern pro Sekunde**, fast 18 Jahre benötigen!
Ach ja, damit hat man diese Zahl allerdings nicht berechnet, das müsste natürlich vorher auch noch erledigt werden; dazu ein heißer Tipp: mit dem Taschenrechner geht das nicht!

Hausaufgabe 2. Teil:

1) Rein theoretisch: welche Strecke würde ein 0,1 mm dickes Papier durchmessen, wenn man es 100 Mal falten könnte? Gib das Ergebnis in einer realistischen Maßeinheit an!

2) Nach einer alten Sage geht die Erfindung des Schachspiels auf einen indischen Weisen zurück, der einem ebenfalls indischen Herrscher (Maharadscha, König oder was auch immer) folgende Belohnung für das Spiel abverlangte: „Gib mir 1 Reiskorn für das erste Feld, 2 Körner für das 2. Feld, 4 für das 3. Feld, 8 für das 4. Feld usw., also verdopple immer die Zahl der Reiskörner.“ Welche Anzahl an Reiskörnern wurde dem zunächst müde lächelnden Despoten präsentiert?

Anwendung: Berechnung von Potenzrechenaufgaben aller Art

1. gemeinsame Arbeit:

1) $x^5 \bullet x^3 : x^7 \bullet x^4$ 2) $\dfrac{\left(m^4\right)^7 : m^5 \bullet m^8}{m^4 \bullet m^{11} : \left(m^3\right)^4}$ 3) $\dfrac{\left(c^{-4}\right)^3 \bullet \left(c^{-2}\right)^{-5} : c^{-10}}{c^{-7} : \left(c^3\right)^{-3} \bullet c^6}$

4) $x^3 c^5 a^7 b^5 m^3 u^7$ 5) $\dfrac{s^4 : t^4 \bullet z^4}{u^4 \bullet v^4 : w^4}$

6) $8x^7 + 5z^2 - 13u^5 - 9z^3 + 11z^2 + 3x^7 - 12z^3 + 25u^5 - 31x^7 + 15z^2$

Hausaufgabe 3. Teil: Berechne die folgenden Aufgaben!

50. Vereinfachen Sie die Terme:

a) $(2a^{-2}b^3)^{-1}$

b) $(x^6y^{-3})^{-4}$

c) $(-a^{-9})^{-n}$

d) $\left(\dfrac{3a^4b^3}{4a^{-2}b} : \dfrac{2a^{-1}b^2}{5a^3\,b^{-4}}\right)^{-3}$ *e)* $\dfrac{-27x^{-3}y^{-4}z^{-2}}{2^{-2}x^5\,y^{-1}z^6} \cdot \dfrac{3^{-2}x^7\,y^{-1}z^4}{4^2x^{-3}y^7z^{-9}}$

f) $\dfrac{p^{-3}q^2\,r^{-12}}{3^3\,r^4\,s^{-5}q} \cdot \dfrac{(-1)^{-5}p^{-3}q^8r^{-4}s^2}{2^{-5}s^9\,p^0\,q^{-8}r^{10}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{81} \cdot p^4\,q^3\,r^{-2}q^{-7}}{4^2\,r^{-32}p^{-2}s^3q^2}$

g) $\dfrac{48x^{-5}\,y^{14}\,z^{-27}}{63x^8\,y^{-25}\,z^{10}} : \dfrac{2^{-3}x^{12}\,y^{-2}z}{7x^{-1}\,y^{13}\,z^{-6}}$

h) $\left(\dfrac{p^{-4}\,q^3\,r^{-2}}{3^3\,r^4\,s^{-5}}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{(-1)^{-4}p^{-2}q^8\,s^{-3}}{2^3r^9p^2q^{-8}r^{-2}}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{p^4\,q^3\,r^{-11}}{r^{-3}\,p^{-2}\,s^5\,q^3}\right)^3$

51. Geben Sie als Potenz an:

a) $\sqrt{(x-4)^3}$ *b)* $\sqrt{\sqrt{x}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ *d)* $x \cdot \sqrt{x}$

e) $\dfrac{-2}{\sqrt[n]{(x-3)^4}}$ *f)* $\dfrac{-2 \cdot (x-3)}{\sqrt[n]{(x-3)^4}}$

g) $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$

38. Wenden Sie die Potenzgesetze an, und berechnen Sie:

a) $3^2 \cdot 4^2$ *b)* $2^3 \cdot 3^3$
c) $(-1)^7 \cdot (-2)^7$ *d)* $5^5 \cdot 2^5$
e) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^4$ *f)* $0{,}02^4 \cdot 50^4$
g) $(-3)^5 \cdot (-2)^5$

39. Wenden Sie die Potenzgesetze an, und berechnen Sie:

a) $12^9 : 6^9$ *b)* $(-1000)^3 : 50^3$
c) $8^4 : (-2)^4$ *d)* $\frac{(-1)^4}{(-5)^4}$
e) $\frac{144^2}{36^2}$ *f)* $\frac{(-10)^5}{5^5}$
g) $\left(2\frac{3}{4}\right)^3 : \left(-\frac{11}{12}\right)^3$

40. Wenden Sie die Potenzgesetze an, und berechnen Sie:

a) $(-2)^2$ *b)* -2^2
c) $-(2^2)$ *d)* $-3 \cdot 4^3$
e) $-(3 \cdot 4^3)$ *f)* $-(3 \cdot 4)^3$
g) $(-3 \cdot 4)^3$ *h)* $-2 \cdot 2^4$
i) $(-2 \cdot 2)^4$ *j)* $\left(\frac{4}{5}\right)^2$
k) $\frac{4^2}{5}$ *l)* $\frac{7^4}{14^4}$

41. Wenden Sie die Potenzgesetze an, und berechnen Sie:

a) $\left(2^2\right)^2$ *b)* $\left((-1)^3\right)^2$
c) $\left(10^3\right)^5$ *d)* $\left((-3)^2\right)^2$
e) $\left(0{,}1^3\right)^4$ *f)* $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^2$
g) $2^{(2^2)}$

42. Wandeln Sie die Terme in gleichwertige um, indem Sie Potenzgesetze anwenden:

a) $a^2 \cdot a^3$ *b)* $a^4 \cdot a^2 \cdot a^1$
c) $x^5 \cdot x^7$ *d)* $x^n \cdot x^{2n}$
e) $p^{2k} \cdot p^{k-1}$ *f)* $(a + b)^3 \cdot (a + b)^2$
g) $(x - y)^5 \cdot (x - y)^1 \cdot (x - y)^2$ *h)* $x^{n+1} \cdot x^{n-1}$
i) $w^{k+2} \cdot w^{2k} \cdot w^2 \cdot w^{2k-3}$ *j)* $(a + b)^2 \cdot (a - b)^2$

43. Wandeln Sie die Terme in gleichwertige um, indem Sie Potenzgesetze anwenden:

a) $(a - b)^5 \cdot (b - a)^5$ *b)* $(5x - 15y)^3 \cdot (x - 3y)^3$
c) $(2x - 3y)^3 \cdot (2x + 3y)^3$ *d)* $(8 - 4a)^2 \cdot (4a - 8)^3 \cdot (a - 2)^5$

44. Wandeln Sie die Terme in gleichwertige um, indem Sie Potenzgesetze anwenden:

a) $a^7 : a^1$ *b)* $x^{13} : x^2$
c) $y^2 : y^2$ *d)* $z^{n+1} : z^{n-1}$
e) $(a - b)^6 : (a - b)^4$ *f)* $(5x + 4y)^{2k} : (15x + 12y)^k$
g) $z^{5k-1} : z^{1-5k}$

45. Multiplizieren Sie die Klammern aus:

a) $(a^3 - a^2) \cdot a^2$ *b)* $(b + b^4 + b^2) \cdot b^3$
c) $(m^n - m) \cdot m^n$ *d)* $x^3y^2 \cdot (2x + 3y^2 - x^2)$
e) $(p^4 - q^3) \cdot (p^3 + q^4)$ *f)* $(2a^3b^2c) \cdot (-3a^5 + 2b^7 - c^2)$
g) $(9x^2 + 3y) \cdot (2 + 3x) \cdot (y^2 - 1)$

46. Dividieren Sie:

a) $(4a^3b^6 - 12a^4b^2 + 6a^4b) : 2ab$
b) $(84x^{12}y^9 - 133x^{10}y^4 - 91x^7y^8) : 7x^4y^2$
c) $\left(-\frac{3}{7}v^5w^3x^7 + \frac{2}{5}v^6w^9x^3 - \frac{8}{3}v^4w^5x^6 - \frac{4}{9}v^3w^9x^2\right) : \left(-\frac{6}{7}v^3wx^2\right)$

47. Berechnen Sie:

a) 2^{-3} *b)* 2^{-6}
c) $(-2)^{-4}$ *d)* 10^{-7}
e) $(-1)^{-9}$ *f)* 5^{-3}
g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

48. Berechnen Sie:

a) $2^{\frac{1}{2}}$ *b)* $8^{\frac{1}{3}}$
c) $4^{\frac{5}{2}}$ *d)* $100^{\frac{7}{2}}$
e) $\left(\frac{9}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$ *f)* $27^{-\frac{4}{3}}$

49. Berechnen Sie:

a) $\sqrt[3]{64}$ *b)* $\sqrt[4]{81}$
c) $\sqrt[5]{3125}$ *d)* $\sqrt[4]{10000}$
e) $\sqrt[3]{0{,}001}$ *f)* $\sqrt{\sqrt{16}}$
g) $\sqrt[3]{2^6}$ *h)* $\sqrt[4]{\frac{1}{256}}$
i) $\sqrt[5]{\frac{32}{100000}}$ *j)* $\sqrt[3]{-8}$