Lektion 1: mathematische Grundbegriffe und die Rechengesetze

In der Mathematik werden häufig Symbole eingesetzt, um Wörter oder kurze Ausdrücke abzukürzen und somit die Schreibweise mathematischer Sachverhalte zu vereinfachen, die sogenannten **Quantoren.** Einige dieser Quantoren werden hier vorgestellt und sollen in Zukunft immer verwendet werden, ein paar davon sind bereits bekannt.

$\vee$ bedeutet „oder“, Bsp.: $A \vee B$ bedeutet: „entweder gilt Aussage A oder Aussage B“
$\wedge$ bedeutet „und“, Bsp.: $A \wedge B$ bedeutet: „sowohl Aussage A als auch Aussage B gelten“ bzw. „es gilt Aussage A und auch Aussage B“
$\in$ bedeutet „ist Element von/aus“, Bsp.: $x \in \mathbb{R}$ bedeutet: „x ist Element aus den reellen Zahlen“
$\forall$ bedeutet „für alle“, Bsp.: $\forall\ x \in \mathbb{R}$ (...) bedeutet: „für alle x aus den reellen Zahlen gilt ..“
$\exists$ bedeutet „es existiert“, Bsp.: $\exists\ x \in \mathbb{R}$ (...) bedeutet: „es existiert (wenigstens) ein x aus den reellen Zahlen, so dass ...“

Grundbegriffe:

1. Addition: $a + b + c$ ist eine Additionsrechnung; die einzelnen Elemente der Addition a, b, c heißen **Summanden**, das Ergebnis einer Addition ist die **Summe**; d.h. $a + b + c$ heißt ebenfalls Summe, da der Term in dieser Form nicht weiter berechnet werden kann.

2. Multiplikation: $a \bullet b \bullet c$ ist eine Multiplikationsrechnung; die einzelnen Elemente a, b, c heißen **Faktoren**, das Ergebnis, also auch bereits der vorgegebene Term der Multiplikation, ist das **Produkt**.

3. Subtraktion und Division: Der Term $a - b$ einer Subtraktion ist die **Differenz**, der Term $a:b$ einer Division ist der **Quotient**.

4. Wurzelrechnung: Der Term unter einer Wurzel heißt Radikand: $\sqrt{Radikand}$

5. Potenzrechnung: Der Ausdruck B^E heißt **Potenz**, die unten stehende Zahl ist die **Basis**, die Hochzahl der **Exponent**. Die Potenzschreibweise ist eine Abkürzung für ein Produkt der selben Faktoren: $a \bullet a \bullet a \bullet a = a^4$

6. Bruchrechnung: Der Ausdruck $\frac{Z}{N}$ heißt **Bruch**, die oben stehende Zahl Z ist der **Zähler**, die unten stehende Zahl N der **Nenner** des Bruches. Der Bruchstrich bedeutet: „geteilt durch“.

Die reellen Zahlen sind ein „Körper“

In der Schulmathematik wird grundsätzlich mit Zahlen aus der Menge der reellen Zahlen gerechnet, es sei denn, etwas Anderes wird ausdrücklich angegeben. Diese Menge enthält alle Zahlen, die wir kennen, also ganze Zahlen genau so wie echte oder Dezimalbrüche, aber auch alle Wurzeln, alle Logarithmen, die Zahlen π (3,141592654...) und e (2,718281828...).

Aber neben dieser Ausführlichkeit hat die Menge der reellen Zahlen noch eine weitere Besonderheit: sie ist ein **Körper.**

<u>Körperaxiome:</u> Als Körper werden alle Mengen bezeichnet, für die die folgenden Regeln (Axiome) gelten:

In der Menge K sind die beiden Rechenverknüpfungen Addition und Multiplikation definiert. Weiterhin gilt:

<u>I. Axiome der Addition:</u>

a) Assoziativgesetz: $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall\ x, y, z \in K$
b) Kommutativgesetz : $x + y = y + x \quad \forall x, y \in K$
c) Existenz der Null (des Nullelementes) : $\exists\ 0 \in K$ mit $x + 0 = 0 + x = x\ \forall\ x \in K$
d) Existenz des Negativen: $\forall x \in K\ \exists -x \in K$ mit $x + (-x) = (-x) + x = 0$

<u>II. Axiome der Multiplikation:</u>

a) Assoziativgesetz: $(xy)z = x(yz)\ \forall x, y, z \in K$ (Die Malpunkte dürfen fehlen!)
b) Kommutativgesetz: $xy = yx \quad \forall x, y \in K$
c) Existenz der Eins (des Einselementes): $\exists\ 1 \in K, 1 \neq 0$ mit $x \bullet 1 = 1 \bullet x = x\ \forall\ x \in K$
d) Existenz des Inversen: $\forall\ x \in K, x \neq 0\ \exists\ x^{-1}$ mit $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$

<u>III. Distributivgesetz:</u> $x(y + z) = xy + xz \quad \forall\ x, y, z \in K$

Wie man leicht nachvollziehen kann, gelten alle diese Regeln für die reellen Zahlen, ja durch diese Regeln sind die reellen Zahlen überhaupt erst definiert.
Dagegen können wir sofort beweisen, dass die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ keine Körper sind; so fehlt z.B. bei den natürlichen Zahlen das Negative der Addition, da es hier überhaupt keine negativen Zahlen gibt und bei den ganzen Zahlen das Inverse der Multiplikation, da es keine Brüche gibt.

<u>Hausaufgabe 1. Teil:</u> Sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, also die Menge der Brüche, ein Körper? Überprüfe alle Körperaxiome und weise sie so nach!

<u>Weitere wichtige Rechengesetze:</u>

1) „Klammerrechnung kommt vor Potenzrechnung kommt vor Punktrechnung kommt vor Strichrechnung“. Bedeutet: zuerst werden die Inhalte von Klammern berechnet, dann Potenzen, anschließend Produkte bzw. Quotienten und erst am Schluss Summen bzw. Differenzen.

2) Produkte/Quotienten zweier Zahlen mit dem gleichen Vorzeichen sind stets positiv, bei verschiedenen Vorzeichen stets negativ.

3) Steht ein Minuszeichen vor einer Klammer (sogenannte „Minusklammer“), so werden beim Auflösen der Klammer alle Vorzeichen der **Summanden** in der Klammer umgedreht. (Diese Regel folgt direkt aus dem Distributivgesetz, beachte: $-(\ldots) = -1 \bullet (\ldots)$!)
Entsprechend gilt: wird eine Klammer mit einer negativen Zahl multipliziert, die sowohl vor als auch hinter der Klammer stehen kann, so drehen sich beim Auflösen der Klammer alle Vorzeichen der Summanden in der Klammer um.

4) Spezialfälle aus dem Distributivgesetz sind die **binomischen Formeln**:
1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 2. $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$ 3. $(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$

Hausaufgabe 2. Teil: Lerne alle voranstehenden Quantoren, Begriffe und Rechengesetze sowie die Körperaxiome!

Anwendung: Termumformungen und Termvereinfachungen

1. Gemeinsame Arbeit:

1) Löse die Klammern auf, vereinfache die Terme und fasse soweit wie möglich zusammen:
   $-3(2a – 4b) + 5(8 – (-a – 4b)(-2)) + (4a – 3b)(3 – c)$
2) Berechne die binomischen Formeln:
   $(3x – 4c)^2$; $(-8f + 3g)^2$; $(5z + 2)^2$; $(8 – 4b)(8 + 4b)$
3) Finde die binomischen Formeln und fasse jeweils in $(...)^2$ bzw. (...+...)(...-...) zusammen:
   $16s^2 + 24xy – 25z^2 + 16sc + 9y^2 + 4c^2 + 36a^2 + 16x^2$
4) Klammere so weit wie möglich aus:
   $32a^3b^4c^2 – 72a^2b^3c^4 + 48a^4b^3c^5 – 96a^2b^5c^3$

2. Schülerarbeit (Was nicht geschafft wird, gehört zur **Hausaufgabe 3. Teil**)**:**

1) Löse die Klammern auf, vereinfache die Terme und fasse soweit wie möglich zusammen:
   a) $(6s – 3x)(-4) – (3 – (5 + 2a) + (3s – 5x) – 2(-4x – 2s)) – (a + 3)(-3)$
   b) $–5(4 + 2a –(4a-7(2-a)))-(3a-(5-2a)(-3))$
2) Berechne die binomischen Formeln und fasse zusammen:
   a) $(4a – 6b)^2 – (2b + 8a)^2 + (7a – 3b)(7a + 3b) –4(9a-8b)^2$
   b) $(2xyz + 8ab)^2 + (4ab + 3xyz)^2(-4) – 10(-xyz + 2ab)(xyz + 2ab)$
3) Finde die binomischen Formeln und fasse jeweils in $(...)^2$ bzw. (...+...)(...-...) zusammen:
   a) $12dg – 144w^2 + 100a^2 + 9g^2 – 25b^2 + 4d^2$
   b) $196x^2z^4 – 84axz^2 + 225a^6 + 400m^4 + 9a^2 – 600m^2a^3$
4) Klammere so weit wie möglich aus:
   a) $35n^3k^5m^4 + 56m^3n^4k^3 – 63k^2n^5m^3 – 84n^3k^4m^6$
   b) $45lm – 60ml^2 + 90m^2l^3 – 120lm$

Hausaufgabe 3. Teil: Auf der Rückseite sind 2 Seiten aus einem alten Mathebuch der 8. Klasse aus den 1980er Jahren kopiert. Berechne davon die Aufgaben 2 und 17, die übrigen Aufgaben können so nach und nach zur Übung bearbeitet werden!

1. Löse die Klammer auf.

a) $7(8x+5)$	b) $10(3x+2y)$	c) $a(4b+c)$	d) $a(7x+5y)$
$6(3+5r)$	$9(7a+4b)$	$k(b+11r)$	$t(3r+14s)$
$4(9t+1)$	$12(2r+6s)$	$x(1+20y)$	$w(9u+12v)$
$9(7b+6)$	$15(4d+9c)$	$y(6x+5)$	$c(8a+7b)$
e) $2x(3a+4b)$	f) $(7x+4y)\,8z$	g) $20a(15b+45c)$	h) $(8a+3b)\,30c$
$5a(7b+c)$	$(3t+20u)\,5w$	$24x(50y+15z)$	$(26u+16v)\,2w$
$9r(x+11y)$	$(12q+1)\,15k$	$16r(25x+75t)$	$(35e+32f)\,8g$
$4z(6x+7y)$	$(15r+5s)\,7t$	$10b(17e+23f)$	$(19x+21y)\,5z$

2. Löse die Klammer auf.

a) $8(a+b+c)$	b) $25(3a+4b+2c)$	c) $a(3x+8y+7z)$	d) $6r(7s+5t+10u)$
$15(1+x+y)$	$4(25x+15x+5z)$	$4x(a+9b+5c)$	$3a(9x+12y+8z)$
$9(r+s+11)$	$7(8r+s+1)$	$12t(4u+5v+w)$	$4b(8e+7f+11g)$
$(x+y+z)\cdot 4$	$(30q+24v+t)\cdot 15$	$(20r+15s+12t)\cdot 8q$	$(12a+13b+14c)\cdot 5y$
$(a+1+b)\cdot 20$	$(4u+7v+9w)\cdot 20$	$(24x+1+12y)\cdot 25z$	$(7+15c+25d)\cdot 4z$

3. Wende das Verteilungsgesetz (Distributivgesetz) an.

a) $9(x-y)$	b) $(x-y)\cdot 4$	c) $a(x-y)$	d) $(a-b)\,c$	e) $x(1-y)$
$12(a-b)$	$(a-b)\cdot 2$	$r(u-v)$	$(x-y)\,z$	$a(b-1)$
$40(2-t)$	$(r-s)\cdot 15$	$k(a-b)$	$(r-s)\,q$	$r(s-0)$

4. Löse die Klammer auf.

a) $15(3x-7)$	b) $a(7b-c)$	c) $3a(4x-y)$	d) $(6y-5z)\cdot 8x$
$12(a-5b)$	$x(y-8z)$	$5r(2s-4t)$	$(1-12b)\cdot 7a$
$9(1-4r)$	$r(20s-1)$	$7u(9v-3w)$	$(4s-t)\cdot 15r$
$6(9t-q)$	$c(a-18b)$	$2x(y-50z)$	$(5b-7c)\cdot 10a$
e) $5(x+y-z)$	f) $(a+b-c)\cdot 3$	g) $x(y-z+5)$	○ h) $2a(8b+3c-5d)$
$8(a+b-4)$	$(x-y+5)\cdot 7$	$r(3-s+t)$	$5x(3y-4z-11)$
$a(x+y-1)$	$(a+b-c)\cdot d$	$u(v-w-3)$	$8(6a-4b+7c)$
$r(s+1-t)$	$(x-y-4)\cdot 2$	$a(b-c-d)$	$9(1-12r-s)$
i) $x(x+7)$	j) $8(2x-8)$	k) $6x(5+2x)$	○ l) $\frac{1}{2}x^2(y+z)$
$a(5-a)$	$7(a-7b)$	$4a(3a-9b)$	$2{,}5a(b^2-c^2)$
$r(r+s)$	$4(r^2+4)$	$5t(1+5t)$	$xy(ab+c)$
$a(a-b)$	$10(1-10x)$	$3a(7b-4c)$	$0{,}3r^2(s^2+t^2)$

5. Löse die Klammern auf und fasse zusammen.

a) $7(x+y)+3(x-y)$	b) $x(y-z)+y(4-x)$	c) $(3x-5)\cdot r+(5-x)\cdot 3r$
$14(a+b)+9(b-a)$	$a(b+c)+a(b-c)$	$8x(2y+3z)+(7y-2z)\cdot 4x$

6. Klammere einen gemeinsamen Faktor aus.

a) $5a+5b$	b) $11x-11y$	c) $7x+7yz$	d) $4a+4$
$7x+7y$	$19u-19v$	$3ab-3c$	$9-9x$
$13r+13s$	$23a-23b$	$2rs+2t^2$	$14u+14$
e) $4b+ab$	f) $xy-xz$	g) $a+5ab$	h) $4ab-9bc$
$3x-xy$	$uv+vw$	x^2-2xy	a^2b+7b^2
$rs+rr$	t^2-st	r^2-r	x^2y+x
$7a-ab$	$3t+t^2$	$7ab+7$	$4rs-3r$

7. Gib den höchsten gemeinsamen Faktor beider Summanden an.

a) $4xy+4xz$	b) $3x^2+3xy$	c) $6ab+3ac$	d) $15xy+25yz$

8. Klammere so aus, daß der Term in der Klammer möglichst einfach wird.

a) $9ab+9ac$	b) $8uv-8vw$	c) $15uv-5ut$	d) $24xyz+48xy$
$5r^2-5rs$	$3ab+abc$	$12rs-18st$	$15r^2s-25rs^2$
$7xy+7x$	$4xy+12yz$	$20x^2+24xy$	$40uv^2-60uvw$

9. Wurde richtig ausgeklammert? Überprüfe! Korrigiere ggfs. die rechte Seite!

a) $3ab+3c=3(ab+3c)$	b) $5xyz+5x=5x(yz)$	c) $10rs+12rt=10r(s+2t)$
d) $7a\cdot 4a-14ab=14a(2-b)$	e) $9xy-12x^2=3x(3y-4)$	f) $8ax-8by=8ab(x-y)$

10. Klammere aus. Fasse dann zusammen.

a) $5a+11a$	b) $1{,}5b+4{,}5b$	c) $12ab+15ab$	d) $rs-0{,}7rs$
$8x+7x$	$1{,}75x+4x$	$10x^2-11x^2$	$-4a^2+6a^2$
$9r-4r$	$2{,}7t-0{,}2t$	$\frac{3}{5}r^2+\frac{2}{5}r^2$	$-\frac{5}{12}r^2+\frac{7}{12}r^2$
e) $18x^2y-6x^2y$	f) $22abc-30abc$	g) $15xy+12xy-7xy$	h) $19cd-23cd$
$7{,}2a^2b+1{,}4a^2b$	$-0{,}44x^2+x^2$	$7{,}3ab-1{,}6ab+3{,}5ab$	$12{,}4uv+19{,}3uv$
$-\frac{5}{12}r^2-\frac{7}{12}r^2$	$2{,}5u^2v-3u^2v$	$\frac{3}{4}r^2-\frac{1}{8}r^2-\frac{1}{2}r^2$	$3\frac{1}{4}a^2b^3-1\frac{3}{4}a^2b^3$

11. Fasse zusammen.

a) $11a-2b+5a+8b$	b) $8a^2-5b^2-7a^2+2b^2$	c) $17ab+6a-9ab-4a$
$7x+4a-10x-5y$	$\frac{1}{5}x^2+4y-x^2+1{,}3y$	$\frac{3}{4}a^2+\frac{5}{3}b+\frac{1}{2}a^2-\frac{2}{3}b$
$r-4s-s-3r$	$5{,}6xy-2{,}9z+3{,}4-2{,}9xy$	$2{,}4y^2z-3{,}1yz^2+5{,}1y^2z-4{,}3yz^2$

12. Bilde die Gegenzahl. *Beispiel:* $-5x$; Gegenzahl: $(-1)\cdot(-5x)=5x$

a) $-2x$	b) $-(3+x)$	c) $a-b$	d) $-4(3x-y)$
$3a$	$2(x+y)$	$4x+y$	$1{,}5(-2a+8b)$
$-8b$	$-(a-b)$	$-u-7v$	$-x(r+9x)$

13. Subtrahiere durch Addieren der Gegenzahl.

a) $x-(y+z)$	b) $3x-(x-y)$	c) $6a-(-3b+4a)$	d) $8-(2-a+b)$
$x-(y-z)$	$8a-(-a+2b)$	$4x-(-5x-7z)$	$x-(3x+y-2z)$
$a-(5+b)$	$5r-(-r-s)$	$5u-(7u-4v)$	$7r-(-s+2r+5)$
$b-(5-a)$	$k-(8+4k)$	$8r-(-9r+6s)$	$9a-(2b-6c-8d)$

14. Löse die Klammern auf und fasse zusammen.

a) $(a-b)-(a+b)$	b) $-(3-a)+(a-5)$	c) $(8a-3b)-(5a+9b)$
$(x+y)-(x-y)$	$-(x+7)-(4-x)$	$(11x+7y)-(-4x+2y)$
$(u-v)-(v-u)$	$-(a-b)+(b-a)$	$-(4a+b)-(1{,}2b-6a)$
$(r-s)-(r-s)$	$-(x+y)-(y-x)$	$-(a-10b)-(\frac{1}{3}a+8b)$

15. Klammere den Faktor (-1) aus.

a) $-5-a$	b) $-r-9$	c) $-x+y$	d) $a-b$	e) $x-y$	f) $u-1{,}7+v$
$-x-y$	$-a+20$	$-4+q$	$a-x$	$a+b-c$	$\frac{4}{5}+x+y$
$-b-7$	$-c+11$	$-q+4$	$x-a$	$c-d+e$	$-a+b-\frac{1}{2}$

16. Fülle die Lücke aus.

a) $12-3x=-3\cdot(\quad+x)$	b) $-x+xy=-x(1-\quad)$	c) $-ab-8a=-a(\quad+8)$
d) $9x-12xy=\quad\cdot(-3+4y)$	e) $a-b=\quad\cdot(-a+b)$	f) $x-y=\quad\cdot(y-x)$

17. Löse die Klammern auf. Fasse dann zusammen.

a) $x-(x+y)+2(y-x)-3(x-y)+4(x+2y)$

b) $3a-2(a-b)-5(b+a)-(3a+2b)+2(8a-b)$

c) $x^2-3(x^2-y)+x(x+y)-x(y-x)+x^2(1-y)$

d) $5(x+y+z)-7(x-y+z)-8(x+y-z)$

e) $a+15(b+c)-9(a-b-c)-24(a+b+c)$

f) $ax-b(x-y)-a(x-y-z)-b(y+z)$