**Die quadratische Gleichung und die quadratische Funktion**

## 1. Lösen einer quadratischen Gleichung

Quadratische Gleichungen heißen alle Gleichungen der Form $\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$, wobei a, b, c als Parameter beliebige reelle Zahlen sein können. Die angegebene Darstellung heißt **allgemeine Form der quadratischen Gleichung.**
Je nachdem, ob die Parameter b bzw. c gleich 0 sind oder nicht, ergeben sich verschiedene Lösungsmöglichkeiten für die Gleichung.

### 1.1 b = 0, die reinquadratische Gleichung

Wenn b = 0 ist, bekommen wir die Gleichung

$$a\,x^2 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\,x^2 = -c$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{a}$$

(Quadratwurzel ziehen)

$$\Leftrightarrow \quad |\,x\,| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

**Wichtig:** nicht die Betragsstriche vergessen; die Quadratwurzel aus einer Zahl kann niemals negativ sein, x dagegen schon!

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \vee \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

„V“ steht natürlich für „oder“...

Da im Reellen die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl nicht gezogen werden kann, finden sich 2 Lösungen der Gleichung, wenn der Term unter der Wurzel größer als 0 ist, jedoch keine Lösung, wenn der Term unter der Wurzel kleiner als 0 ist.

### 1.2 c = 0, die quadratische Gleichung ohne Absolutglied

Mit c = 0 erhalten wir die Gleichung

$$a\,x^2 + b\,x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(a\,x + b) = 0$$

x wurde ausgeklammert; es ergibt sich ein Produkt, das genau dann 0 wird, wenn einer der Faktoren 0 wird, also:

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \vee \quad a\,x_2 + b = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{b}{a}$$

In diesem Fall muss durch das Ausklammern von x keine Wurzel gezogen werden; die Gleichung hat daher ohne Einschränkung immer 2 Lösungen, von denen eine immer 0 ist.

## 1.3 Die allgemeine Form

Wenn weder b noch c gleich 0 werden, muss die quadratische Gleichung in ihrer allgemeinen Form gelöst werden. Dazu geht man folgendermaßen vor:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

teile durch a:

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0$$

ersetze nun zur Vereinfachung der Schreibweise $\frac{b}{a}$ durch p und $\frac{c}{a}$ durch q; es entsteht folgende Form:

$$\Rightarrow \quad x^2 + p x + q = 0$$

Diese Form der quadratischen Gleichung ist die **Normalform**; zwei Bedingungen müssen hier erfüllt sein: **vor dem $x^2$ steht kein Koeffizient (also: $1 \cdot x^2$ !) und rechts steht die 0.**

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + p x = - q$$

Ab hier machen wir uns die binomische Formel zunutze; es gilt: $a^2 + 2\,ab + b^2 = (a + b)^2$ ; dabei steht „$a^2$" für unser „$x^2$" und „2 ab" für „p x". Wir suchen demnach den Ersatz für das „$b^2$" der binomischen Formel. Da jedoch „p x = 2 ab" gilt und „x" dem „a" entspricht, muss „b = ½ p" sein. Daraus folgt: um die binomische Formel anwenden zu können, muss **(½ p)$^2$** addiert werden, die sogenannte **quadratische Ergänzung**.

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + p x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Nun lässt sich die binomische Formel anwenden:

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Hier kann man die Quadratwurzel ziehen, um endlich an das x heranzukommen! Achtung: Betragsstriche (s.o.)!

$$\Leftrightarrow \quad \left| x + \frac{p}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Da die Wurzel nicht negativ sein kann, dagegen jedoch der Inhalt der Betragsstriche, gibt es zwei Lösungen, nämlich:

$$\Leftrightarrow \quad x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x_{1/2} = - \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Das ist die **p-q-Formel zum Lösen der quadratischen Gleichung**; **wichtig: diese Formel darf nur angewendet werden, wenn die quadratische Gleichung in der Normalform vorliegt!**

Wieder hängt die Anzahl der Lösungen vom Term unter der Wurzel ab, diesen bezeichnet man auch als **Diskriminante D**. Ist $D > 0$, gibt es zwei Lösungen, mit $D = 0$ genau eine Lösung und für $D < 0$ keine Lösung, da wir ja aus der negativen Diskriminante nicht die Quadratwurzel ziehen können.

## 1.4 Zerlegung in Linearfaktoren, der Satz des Viéta

Eine andere Lösungsmöglichkeit der quadratischen Gleichung hat folgenden Ansatz:

Liegt die Gleichung bereits in ihrer Normalform vor, kann man ihre Lösungen durch die p-q-Formel finden. Bezeichnen wir diese Lösungen als „u“ und „v“. Diese beiden Lösungen erfüllen aber auch die Gleichung:

**$(x - u)(x - v) = 0$**, da hier beim Einsetzen jeweils von „u“ oder „v“ einer der beiden Faktoren 0 wird und damit der ganze linke Term.
Da also sowohl unsere Ausgangs- als auch die obere Gleichung beide die selben Lösungen haben, kann man das *Gleichsetzungsverfahren* anwenden:

$$x^2 + p\,x + q = 0 \quad \textbf{und} \quad (x - u)(x - v) = 0$$

$\Rightarrow \quad x^2 + p\,x + q = (x - u)(x - v)$ Klammern auflösen :

$\Leftrightarrow \quad x^2 + p\,x + q = x^2 - u\,x - v\,x + uv$ Rechts teilweise (-1) und x ausklammern:

$\Leftrightarrow \quad x^2 + p\,x + q = x^2 - (u + v)\,x + uv$ Ein Vergleich der Koeffizienten beider Seiten ergibt:

$\Rightarrow \quad p = -(u + v)$ bzw. $\mathbf{-p = u + v}$ **und** $\mathbf{q = uv}$

Aus diesen Beziehungen lässt sich der **Satz des Viéta** formulieren:

**Für die Lösungen u und v einer quadratischen Gleichung in ihrer Normalform $x^2 + p\,x + q = 0$ gilt: $u + v = -p$ und $uv = q$.**

Diese Erkenntnis lässt sich auch ausnutzen, um die Lösungen einer quadratischen Gleichung der Normalform zu bestimmen; **Sinn macht das allerdings nur dann, wenn diese Lösungen ganzzahlig sind, da das Verfahren andernfalls viel zu kompliziert wäre!**
Dazu geht man folgendermaßen vor:

Bestimme zunächst alle Teiler – Gegenteilerpaare von q, überprüfe dann, für welches Paar (u;v) die Beziehung $u + v = -p$ erfüllt ist.

**Beispiel:**

$x^2 + 8\,x - 9 = 0$ ; $-9 = -1 \cdot 9 = 1 \cdot (-9) = -3 \cdot 3$

Für das Paar (1; - 9) gilt $1 + (-9) = 1 - 9 = -8 = -p$, also lauten die Lösungen:
$x_1 = 1 \vee x_2 = -9$.

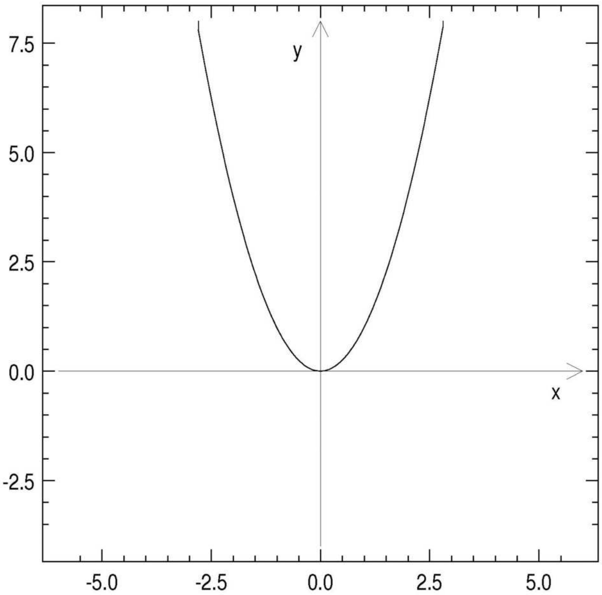
Wir überprüfen: $(x - 1)(x - (-9)) = (x - 1)(x + 9) = x^2 - x + 9\,x - 9 = x^2 + 8\,x - 9$.

**Bemerkung:** die Zerlegung $x^2 + p\,x + q = (x - u)(x - v)$, falls u und v Lösungen von $x^2 + p\,x + q = 0$ sind, heißt auch **Zerlegung in Linearfaktoren**, da jeder dieser Faktoren für sich betrachtet die Funktion einer Gerade (z.B. $f(x) = x - u$), also einer linearen Funktion, darstellt!

## 2. Die quadratische Funktion

Die Funktionen der Form **f(x) = a $x^2$ + b x + c** heißen quadratische Funktionen, ihr Graph ist die **Parabel**. Um die verschiedenen Formen der Parabel zu erklären, untersuchen wir, wie wir die einfachste Form der quadratischen Funktion **f(x) = $x^2$** , deren Graph die **Normalparabel** ist, durch einfache Änderungen der Funktionsvorschrift beeinflussen können.

### 2.1 Die Normalparabel f(x) = $x^2$



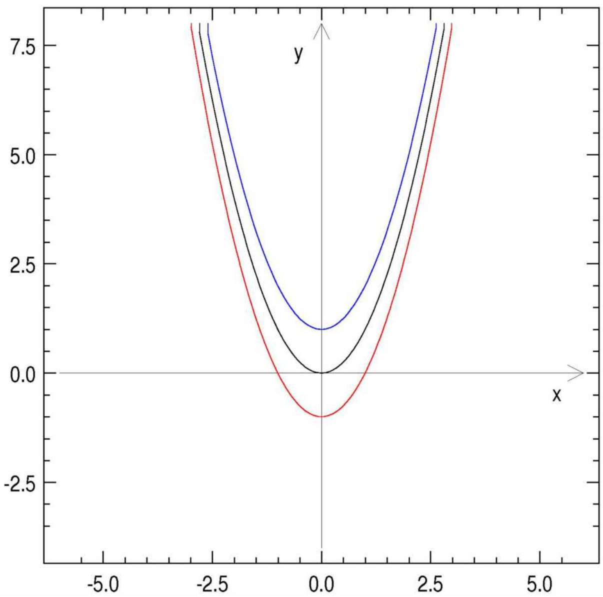

Um die Normalparabel der nebenstehenden Abbildung vernünftig zeichnen zu können, benötigen wir eine Wertetabelle. Hierfür werden aus vorgegebenen x-Werten die y-Werte nach der Funktionsvorschrift f(x) = y = $x^2$ errechnet (beachte: da bei positiven und negativen x-Werten die gleichen y-Werte aus $x^2$ berechnet werden, reicht jeweils eine Spalte):

| **x** | 0 | ±0,5 | ±1 | ±1,5 |
|---|---|---|---|---|
| **$x^2$** | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 |

| **x** | ±2 | ±2,5 | ±3 | ±3,5 |
|---|---|---|---|---|
| **$x^2$** | 4 | 6,25 | 9 | 12,25 |

Der tiefste oder höchste Punkt der Parabel ist der **Scheitelpunkt**. Dieser liegt bei der Normalparabel im Koordinatenursprung (0 / 0).
Im Folgenden wird die Funktionsvorschrift durch einfache Rechenschritte geändert und die Auswirkung auf die Normalparabel untersucht.

### 2.2 Addition einer reellen Zahl f: f(x) = $x^2$ + f



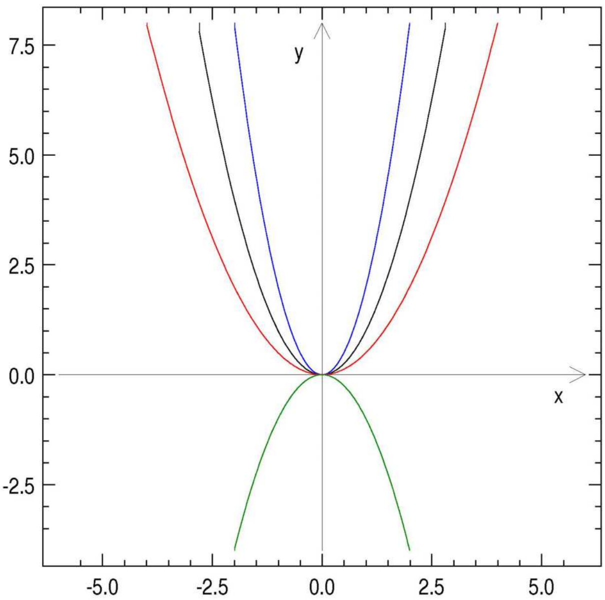

Als Beispiel setzen wir f = 1 und f = -1, d.h. wir erhalten f(x) = $x^2$ + 1 bzw. f(x) = $x^2$ – 1. Hierzu die Wertetabelle:

| **x** | 0 | ±0,5 | ±1 | ±1,5 |
|---|---|---|---|---|
| **$x^2$ + 1** | 1 | 1,25 | 2 | 3,25 |
| **$x^2$ - 1** | - 1 | - 0,75 | 0 | 1,25 |

| **x** | ±2 | ±2,5 | ±3 | ±3,5 |
|---|---|---|---|---|
| **$x^2$ + 1** | 5 | 7,25 | 10 | 13,25 |
| **$x^2$ - 1** | 3 | 5,25 | 8 | 11,25 |

Besonders nach Zeichnung der Graphen wird deutlich, dass die Normalparabel (schwarz) durch Addition von f nach oben (f = 1) bzw. nach unten (f = -1) verschoben wurde. Also ist **f ein Verschiebungsfaktor in y – Richtung; für f > 0 nach oben, für f < 0 nach unten**.

## 2.3 Multiplikation mit einer reellen Zahl a: $f(x) = a\,x^2$




Diesmal setzen wir gleich 3 verschiedene Werte für a ein, um ein gründliches Bild der Veränderungen der Normalparabel zu bekommen: a = 2, a = 0,5 und a = -1:

| x | 0 | ±0,5 | ±1 | ±1,5 |
|---|---|---|---|---|
| **$2x^2$** | 0 | 0,5 | 2 | 4,5 |
| **$0{,}5x^2$** | 0 | 0,125 | 0,5 | 1,125 |
| **$-x^2$** | 0 | - 0,25 | - 1 | - 2,25 |

| x | ±2 | ±2,5 | ±3 | ±3,5 |
|---|---|---|---|---|
| **$2x^2$** | 8 | 12,5 | 18 | 24,5 |
| **$0{,}5x^2$** | 2 | 3,125 | 4,5 | 6,125 |
| **$-x^2$** | - 4 | - 6,25 | - 9 | - 12,25 |

Wir erkennen zunächst: **die resultierenden Graphen wurden nicht durch eine Verschiebung der Normalparabel erhalten, da der Scheitelpunkt bei allen Parabeln unverändert im Koordinatenursprung liegt.**

Dagegen wurde durch die Multiplikation mit a die **Form** geändert:

Mit a = 2 erscheint die Parabel schlanker als die schwarze Normalparabel; wir sagen dazu: **die Parabel wurde gestreckt**.

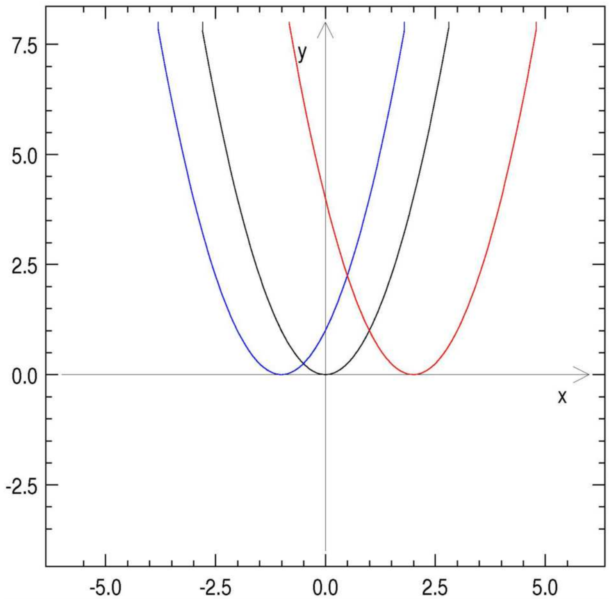
Durch a = 0,5 erhalten wir eine dickere Parabel, **sie wurde gestaucht**.

Der negative Koeffizient a = -1 (Der natürlich vor dem $x^2$ nur als Minuszeichen erscheint!) dagegen bewirkt, dass die Parabel **nach unten geöffnet** wurde. Durch „–1“ erhalten wir eine nach unten geöffnete Normalparabel, hätten wir –2 gewählt, wäre die Parabel zusätzlich gestreckt gewesen, bei –0,5 gestaucht.

Insgesamt gilt:

| | | |
|---|---|---|
| $a < -1$ | ⇒ | Parabel ist nach **unten** geöffnet und **gestreckt** |
| $a = -1$ | ⇒ | Parabel ist nach **unten** geöffnet und die **Normalparabel** |
| $-1 < a < 0$ (a zwischen –1 und 0) | ⇒ | Parabel ist nach **unten** geöffnet und **gestaucht** |
| $0 < a < 1$ (a zwischen 0 und 1) | ⇒ | Parabel ist nach **oben** geöffnet und **gestaucht** |
| $a = 1$ | ⇒ | Parabel ist nach **oben** geöffnet und die **Normalparabel** |
| $a > 1$ | ⇒ | Parabel ist nach **oben** geöffnet und **gestreckt** |

### 2.4 Addition einer reellen Zahl e „unter dem Quadrat“: $f(x) = (x + e)^2$




Wir wählen e = 1 und e = -2 und stellen wieder die Wertetabelle auf. Da in diesem Fall bereits aus den Zahlen die Art der Veränderung sichtbar wird, werden noch einmal die y-Werte der Normalparabel aufgeführt:

| **x** | -3 | -2 | -1 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{x^2}$ | 9 | 4 | 1 | 0 |
| $\mathbf{(x + 1)^2}$ | 4 | 1 | 0 | 1 |
| $\mathbf{(x - 2)^2}$ | 25 | 16 | 9 | 4 |

| **x** | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{x^2}$ | 1 | 4 | 9 | 16 |
| $\mathbf{(x + 1)^2}$ | 4 | 9 | 16 | 25 |
| $\mathbf{(x - 2)^2}$ | 1 | 0 | 1 | 4 |

Schon in der Wertetabelle wird sichtbar:

Bei e = 1 werden die y-Werte der Normalparabel **um eine Stelle nach links verschoben**, durch e = -2 **um zwei Stellen nach rechts**.
Die Graphen bestätigen dieses Bild:
Der Funktionsgraph von $f(x) = (x + 1)^2$ ist eine **um 1 nach links** verschobene Normalparabel, der von $f(x) = (x - 2)^2$ dagegen eine **um 2 nach rechts** verschobene Normalparabel.

**Also: wenn e < 0, erfolgt eine Verschiebung nach rechts und umgekehrt. Außerdem ist die Erkenntnis wichtig, dass die Form der Normalparabel nicht geändert wurde!**

### 2.5 Zusammenfassung: Die Scheitelpunktform

Weitere Veränderungen der Funktionsvorschrift $f(x) = x^2$ der Normalparabel durch einfache Rechnung sind nicht möglich; sowohl das Ziehen einer Wurzel als auch das Potenzieren würden den Grad der Funktion verändern und sind daher nicht zulässig, bei allen angewendeten Rechnungen wurden die reellen Zahlen eingesetzt, wodurch sowohl die Subtraktion als auch die Division bereits eingeschlossen sind.
**Wir haben also mit den genannten Verfahren alle möglichen Veränderungen der Normalparabel erfasst und daher auf diese Weise auch alle quadratischen Funktionen!**

Unsere Ausgangsfunktion war $\mathbf{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$, nun erhalten wir:

$\mathbf{f(x) = a\,(x + e)^2 + f}$ , bei der a die Form und die Öffnung der Parabel bestimmt und die Position unverändert lässt, e und f jedoch bei unveränderter Form die Lage der Parabel verändern. Da sich aus dieser Darstellung die Position des Scheitelpunktes der Parabel ablesen lässt, wird sie auch die **Scheitelpunktform der quadratischen Funktion** genannt. Die Koordinaten des Scheitelpunktes lassen sich dabei leicht anhand der Verschiebungen bestimmen: S hat als x-Koordinate -e und als y-Koordinate f: **S ( -e / f )**.

Beachte: $f(x) = \mathbf{a}\,(x + e)^2 + f = a\,(x^2 + 2\,ex + e^2) + f = \mathbf{a}\,x^2 + 2\,aex + a\,e^2\,f = \mathbf{a}\,x^2 + b\,x + c$, also lässt sich die Form und Öffnung der Parabel mit a auch in der Ausgangsfunktion ablesen!

## 2.6 Form und Lage der quadratischen Funktion: Scheitelpunktform und Nullstellen

Bekanntlich sind die **Nullstellen** die x-Werte, an denen der y-Wert der Funktion Null wird, also an denen **f(x) = 0** gilt. Zur Berechnung der Nullstellen ist daher die Funktionsvorschrift der quadratischen Funktion gleich Null zu setzen; wir erhalten eine quadratische Gleichung, deren Lösung in Kapitel 1 beschrieben wird.
Nun wird uns mir der Scheitelpunktform ein mächtiges Werkzeug in die Hand gegeben, mit dessen Hilfe alle Aussagen über Form und Position der Parabel getroffen werden können, ohne erst eine Wertetabelle aufstellen zu müssen.
Daher ist es nützlich, eine bestehende quadratische Funktionsvorschrift in die Scheitelpunktform umzuwandeln, wenn z.B. der Graph gezeichnet werden soll. Wird nur nach Form und Öffnung der Parabel gefragt, genügt es hingegen, den Koeffizienten a vor dem $x^2$ zu betrachten.

Die **Umwandlung in die Scheitelpunktform** geht folgendermaßen:

$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \;\Leftrightarrow\; f(x) = a\,(x^2 + \frac{b}{a}\,x) + c$

a wurde nur aus den ersten beiden Summanden ausgeklammert!

$\Leftrightarrow\; f(x) = a\,(x^2 + \frac{b}{a}\,x + [\frac{b}{2a}]^2 - [\frac{b}{2a}]^2\,) + c$

Wir kennen sie bereits, die quadratische Ergänzung! Hier wird durch ihr gleichzeitiges Addieren und Subtrahieren die Funktionsvorschrift nicht verändert...

$\Leftrightarrow\; f(x) = a\,([x + \frac{b}{2a}]^2 - [\frac{b}{2a}]^2\,) + c$

Anwendung der binomischen Formel!

$\Leftrightarrow\; f(x) = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - a\,[\frac{b}{2a}]^2 + c$

Die äußere Klammer wurde aufgelöst!

$\Leftrightarrow\; f(x) = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

**Das ist die Scheitelpunktform** mit $e = \frac{b}{2a}$ und $f = -\frac{b^2}{4a} + c$ !

Deutlicher wird die Rechnung an einem Beispiel:

$f(x) = 3\,x^2 + 5\,x + 8 = 3\,(x^2 + \frac{5}{3}\,x) + 8 = 3\,(x^2 + \frac{5}{3}\,x + [\frac{5}{6}]^2 - [\frac{5}{6}]^2\,) + 8$

$f(x) = 3\,([x + \frac{5}{6}]^2 - \frac{25}{36}) + 8 = 3\,(x + \frac{5}{6})^2 - \frac{25}{12} + 8 = 3\,(x + \frac{5}{6})^2 + \frac{71}{12}$ mit **S** $(-\frac{5}{6} \,/\, \frac{71}{12})$.

Die Parabel ist nach oben geöffnet, um den Faktor 3 gestreckt, um den Wert $\frac{5}{6}$ nach links und um den Wert $\frac{71}{12}$ nach oben verschoben!

**2. Variante:**

Viele Schüler scheuen erfahrungsgemäß den Umgang mit Klammern. Für sie hat sich folgende Methode der Umwandlung in die Scheitelpunktform bewährt:

$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \;\Leftrightarrow\; \frac{f(x)}{a} = x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}$ Die ganze Funktionsgleichung wurde durch a geteilt!

$\Leftrightarrow\; \frac{f(x)}{a} = x^2 + \frac{b}{a}\,x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}$ Die quadratische Ergänzung; sie wird genau wie im vorhergehenden Beispiel addiert und subtrahiert...

$\Leftrightarrow\; \frac{f(x)}{a} = (x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}$ Anwendung der binomischen Formel!

$\Leftrightarrow\; f(x) = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - a\,(\frac{b}{2a})^2 + c$ Hier wurde wieder mit a multipliziert, der erste Schritt also rückgängig gemacht!

$\Leftrightarrow\; f(x) = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ **Das ist die Scheitelpunktform** mit e = $\frac{b}{2a}$ und $f = -\frac{b^2}{4a} + c$ !

Rechnen wir das gleiche Beispiel wie oben durch:

$$f(x) = 3\,x^2 + 5\,x + 8 \;\Leftrightarrow\; \frac{f(x)}{3} = x^2 + \frac{5}{3}\,x + \frac{8}{3} \;\Leftrightarrow\; \frac{f(x)}{3} = x^2 + \frac{5}{3}\,x + (\frac{5}{6})^2 - (\frac{5}{6})^2 + \frac{5}{6}$$

$$\frac{f(x)}{3} = (x + \frac{5}{6})^2 - (\frac{5}{6})^2 + \frac{8}{3} \;\Leftrightarrow\; f(x) = 3\,(x + \frac{5}{6})^2 - \frac{25}{12} + 8 \;=\; 3\,(x + \frac{5}{6})^2 + \frac{71}{12}\,.$$

Welchen Weg man letztendlich einschlägt, um zur Scheitelpunktform zu gelangen, ist, wie man am gleichen Ergebnis sehen kann, egal und somit Geschmackssache. Bei der 2. Variante sollte man nur nicht die Multiplikation der Funktionsgleichung mit „a“ am Schluss vergessen; hierfür ist bei dieser Methode nämlich die Gefahr größer als bei Variante 1!