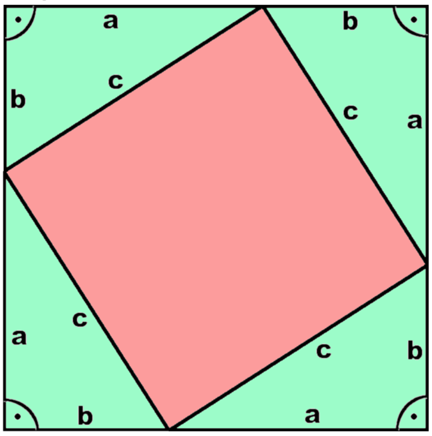
Die Satzgruppe des Pythagoras

1. Der Satz des Pythagoras

Niemand kann es heute wissen, ob der berühmte Grieche Pythagoras auf den gleichen Einfall gekommen ist, als er seinen allseits bekannten Satz aufstellte. Doch lässt sich dieser folgendermaßen leicht herleiten:



In nebenstehender Abbildung wurde das grüne Dreieck mit den Katheten a und b (die den 90°-Winkel einschließen) und der Hypotenuse c gleich viermal gezeichnet, dabei umgrenzen die vier Hypotenusen das innere rote Quadrat.
Man erkennt, dass durch die grünen Dreiecke und das rote Quadrat wiederum ein großes Quadrat gebildet wird, also gilt:

rotes Quadrat + 4 grüne Dreiecke = großes Quadrat bzw.
großes Quadrat – 4 grüne Dreiecke = rotes Quadrat.

So ist bereits völlig intuitiv eine Formel entstanden. Um an die Gleichung rechnerisch heranzugehen, ersetzt man die Figuren durch ihre Flächen, wobei gilt:

rotes Quadrat = c^2 ; grünes Dreieck = $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ (da a zu b die Höhe und umgekehrt) und großes Quadrat = $(a + b)^2$. Daraus folgt:

$$(a + b)^2 - 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b = c^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2\,ab + b^2 - 2\,ab = c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2 \text{ , der Satz des Pythagoras.}$$

Wichtig: Sprich jemanden auf der Straße auf den Satz des Pythagoras an; jeder wird „$a^2 + b^2 = c^2$“ herunterleiern... Beachte: a und b sind die Katheten und c die Hypotenuse, also: a und b **müssen** einen 90°-Winkel einschließen, damit der Satz in der angegebenen Form gelten kann!

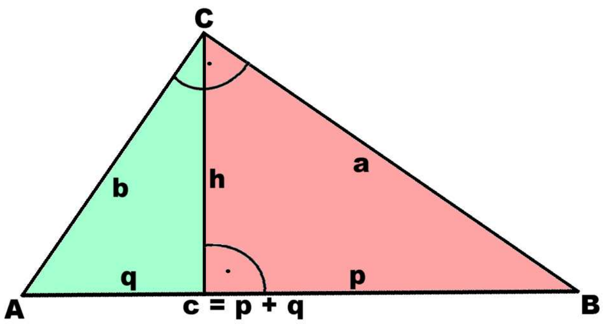
2. Umkehrung des Satzes des Pythagoras

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass selbstverständlich auch die Umkehrung des berühmten Satzes gilt. Also:

Findet sich in einem Dreieck die Gültigkeit der Beziehung: $a^2 + b^2 = c^2$, so schließen a und b einen 90°-Winkel ein. Hat man das Dreieck nicht vor Augen, kann die Beziehung durch Umstellung aller drei Seiten überprüft werden. Gilt z.B. $a^2 + c^2 = b^2$, dann wird der rechte Winkel eben von a und c eingeschlossen, also a und c sind die Katheten, b die Hypotenuse! Findet sich für keine dieser Umstellungen eine Gültigkeit, hat das Dreieck keinen 90°-Winkel.

3. Höhensatz und Kathetensätze

Es gibt Sätze, die man kennen muss, dazu gehört der Satz des Pythagoras.
In der Schule werden aus der Satzgruppe des Pythagoras auch noch 3 weitere Regeln gelehrt, die auf Euklid (ebenfalls Grieche) zurückgehen, der Höhensatz und die beiden Kathetensätze. Hierüber wird in der Regel eine Klassenarbeit geschrieben und danach tauchen diese an sich schönen Gleichungen nie wieder auf. Sie sind zwar praktisch, aber durch die Kenntnis des Satzes des Pythagoras streng genommen überflüssig, da sie sich über diesen leicht herleiten lassen, wie im Folgenden gezeigt wird.



Nebenstehendes Dreieck hat einen 90°-Winkel bei Punkt C und wird durch das Einzeichnen der Höhe h auf der Seite c in zwei weitere rechtwinklige Dreiecke unterteilt; Dadurch wird c in p und q unterteilt, wobei p der rechte Abschnitt ist. Insgesamt lässt sich also dreimal der Satz des Pythagoras aufstellen:

$a^2 + b^2 = c^2 = (p + q)^2 = p^2 + 2\,pq + q^2$ (großes Dreieck),
$q^2 + h^2 = b^2$ (grünes Dreieck) und
$p^2 + h^2 = a^2$ (rotes Dreieck).

Beim großen Dreieck wurde die Seite c gleich durch p + q ersetzt und die binomische Formel aufgelöst.
Setzt man in die Beziehung des großen Dreiecks die der beiden anderen Dreiecke jeweils für a^2 bzw. b^2 ein, ergibt sich Folgendes:

$c^2 = a^2 + b^2$ $\Rightarrow$ $c^2 = p^2 + h^2 + q^2 + h^2$
$\Rightarrow$ $(p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2\,h^2$ (da ja c = p + q ist !)
$\Leftrightarrow$ $p^2 + 2\,pq + q^2 = p^2 + q^2 + 2\,h^2$ (subtrahiere p^2 und q^2 und erhalte:)
$\Leftrightarrow$ $2\,pq = 2\,h^2$

$\Leftrightarrow$ $h^2 = p \cdot q$ (Höhensatz des Euklid)

Diese Beziehung setzt man nun wiederum in die Beziehungen des grünen und roten Dreiecks ein:

$b^2 = q^2 + h^2$ $\Rightarrow$ $b^2 = q^2 + pq$
$\Leftrightarrow$ $b^2 = q \cdot (q + p)$
$\Leftrightarrow$ $b^2 = q \cdot c$

und

$a^2 = p^2 + h^2$ $\Rightarrow$ $a^2 = p^2 + pq$ (Kathetensätze des Euklid)
$\Leftrightarrow$ $a^2 = p \cdot (p + q)$

$\Leftrightarrow$ $a^2 = p \cdot c$

Betrachten wir diese Herleitung der Euklidsätze als Anwendung und willkommene Übung des Satzes des Pythagoras!