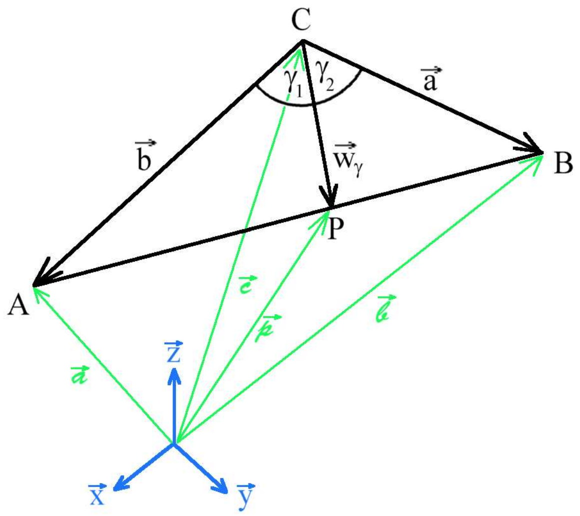
Analytische Geometrie: Berechnung der Winkelhalbierenden im Dreieck



Wenn in einem Vektorraum 3 Punkte A, B, C gegeben werden, können diese immer als Eckpunkte eines Dreiecks angesehen werden. Wie in nebenstehender Abbildung dargestellt, sollen die Dreiecksseiten a und b durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausgedrückt werden; mit den eingezeichneten **Ortsvektoren** $\vec{\boldsymbol{a}}$**,** $\vec{\boldsymbol{b}}$ und $\vec{\boldsymbol{c}}$ (zur Unterscheidung zu den Seitenvektoren wurde eine andere Farbe und Schrift gewählt) ist ersichtlich, wie diese zu berechnen sind:

$\vec{a} = -\vec{\boldsymbol{c}} + \vec{\boldsymbol{b}}$ bzw. $\vec{a} = \vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{c}}$ und

$\vec{b} = -\vec{\boldsymbol{c}} + \vec{\boldsymbol{a}}$ bzw. $\vec{b} = \vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{c}}$.

Wir wollen die Winkelhalbierende zum Winkel γ berechnen. Diese ist die Gerade durch den Eckpunkt C und dem Punkt P auf der Strecke von A nach B. Ihr Richtungsvektor ist der Vektor $\vec{w}_\gamma$, der C mit P verbindet. Für eine Berechnung ist es hilfreich, P wiederum als Punkt auf der Geraden durch A und B anzusehen, d.h. es gilt:

$P \in g_{AB}: \vec{x} = \vec{\boldsymbol{a}} + \lambda \cdot (\vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{a}})$, wobei $(\vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{a}})$ den Richtungsvektor der Geraden von Eckpunkt A zu Eckpunkt B des Dreiecks bezeichnet; nennen wir diesen wegen der kürzeren Schreibweise $\vec{r}$, also $\vec{r} = (\vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{a}})$, dann erhalten wir die Gerade

$g_{AB}: \vec{x} = \vec{\boldsymbol{a}} + \lambda \cdot \vec{r}$ und da P auf dieser Geraden liegt, folgt:

$\vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \lambda \cdot \vec{r}$. Nun ist $\vec{w}_\gamma$ nichts anderes als $\vec{\boldsymbol{p}} - \vec{\boldsymbol{c}}$, es gilt also:

$$\boxed{\vec{w}_\gamma = \vec{\boldsymbol{p}} - \vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \lambda \cdot \vec{r} - \vec{\boldsymbol{c}}}$$

Kommen wir zur eigentlichen Berechnung. Da es sich bei $\vec{w}_\gamma$ um den Richtungsvektor der Winkelhalbierenden zu γ handelt, ist $\gamma_1 = \gamma_2$ und damit auch $\cos(\gamma_1) = \cos(\gamma_2)$. Über das **Skalarprodukt** erhalten wir die Beziehung:

$$\cos(\gamma_1) = \frac{\vec{w}_\gamma * \vec{b}}{|\vec{w}_\gamma| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{w}_\gamma * \vec{a}}{|\vec{w}_\gamma| \cdot |\vec{a}|} = \cos(\gamma_2).$$

Wir multiplizieren mit $|\vec{w}_\gamma|$ und bekommen die Gleichung:

$$\boxed{\frac{\vec{w}_\gamma * \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{w}_\gamma * \vec{a}}{|\vec{a}|} \Rightarrow \frac{(\vec{\boldsymbol{a}} + \lambda \cdot \vec{r} - \vec{\boldsymbol{c}}) * \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(\vec{\boldsymbol{a}} + \lambda \cdot \vec{r} - \vec{\boldsymbol{c}}) * \vec{a}}{|\vec{a}|}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\vec{a}*\vec{b}+\lambda\cdot\vec{r}*\vec{b}-\vec{c}*\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}*\vec{a}+\lambda\cdot\vec{r}*\vec{a}-\vec{c}*\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

In dieser Beziehung ist λ die einzige unbekannte Größe; diese lässt sich nun leicht ermitteln, da durch Berechnung der Skalarprodukte und der Beträge in den Nennern lediglich nur noch eine simple lineare Gleichung, ganz ohne Vektoren, zu lösen ist!

Durch Einsetzen in die Gleichung $\vec{w}_\gamma = \vec{a} + \lambda\cdot\vec{r} - \vec{c}$ wird schließlich der gesuchte Richtungsvektor errechnet, **die Gleichung der Winkelhalbierenden lautet:**

$\mathbf{w_\gamma}$**:** $\vec{x} = \vec{c} + \mu\cdot\vec{w}_\gamma$ **.**

Die ganze Berechnung soll nun noch einmal an einem Beispiel nachvollzogen werden:

Gegeben sind die Punkte **A (1 / 2 / -1), B (-1 / 10 / 15)** und **C (9 / 6 / -5)**. Die Punkte sollen als Eckpunkte eines Dreiecks angesehen und die Winkelhalbierende zum Winkel γ berechnet werden.

Zunächst gilt: $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\10\\15\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}9\\6\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\4\\20\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}9\\6\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-4\\4\end{pmatrix}$.

Daraus folgt: $\cos(\gamma) = \frac{\vec{a}*\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix}-10\\4\\20\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-8\\-4\\4\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-10\\4\\20\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-8\\-4\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{80-16+80}{\sqrt{516}\cdot\sqrt{96}} \approx 0{,}647$ und damit

$\boldsymbol{\gamma = \cos^{-1}(0{,}647) \approx 49{,}68°}$**.**

Mit $g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-1-1\\10-2\\15-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\8\\16\end{pmatrix}$ folgt nun (s. 1. roter Kasten):

$$\vec{w}_\gamma = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\8\\16\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}9\\6\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-4\\4\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\8\\16\end{pmatrix}.$$

Damit können wir die Gleichung des 2. roten Kastens aufstellen:

$$\frac{\left(\begin{pmatrix}-8\\-4\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\8\\16\end{pmatrix}\right)*\begin{pmatrix}-8\\-4\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{96}} = \frac{\left(\begin{pmatrix}-8\\-4\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\8\\16\end{pmatrix}\right)*\begin{pmatrix}-10\\4\\20\end{pmatrix}}{\sqrt{516}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{64+16+16+\lambda\cdot(16-32+64)}{\sqrt{96}} = \frac{80-16+80+\lambda\cdot(20+32+320)}{\sqrt{516}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{96+48\cdot\lambda}{\sqrt{96}} = \frac{144+372\cdot\lambda}{\sqrt{516}}$$

Beachte: $96:\sqrt{96} = \sqrt{96}$ und $48:\sqrt{96} = \frac{1}{2}\sqrt{96}$!

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{96} + \tfrac{1}{2}\sqrt{96}\cdot\lambda = \frac{144}{\sqrt{516}} + \frac{372}{\sqrt{516}}\cdot\lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{96} - \frac{144}{\sqrt{516}} = \left(\frac{372}{\sqrt{516}} - \frac{\sqrt{96}}{2}\right)\cdot\lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\sqrt{96}-\frac{144}{\sqrt{516}}}{\frac{372}{\sqrt{516}}-\frac{\sqrt{96}}{2}} \approx 0{,}30135.$$

Damit erhalten wir $\vec{w}_\gamma = \begin{pmatrix}-8\\-4\\4\end{pmatrix} + 0{,}30135\cdot\begin{pmatrix}-2\\8\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8{,}6027\\-1{,}5892\\8{,}8216\end{pmatrix}$.

Wir bekommen die Winkelhalbierende $\mathbf{w_\gamma}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}9\\6\\-5\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-8{,}6027\\-1{,}5892\\8{,}8216\end{pmatrix}$.

Zur Kontrolle können wir noch die Winkel γ_1 und γ_2 berechnen:

$$|\vec{w}_\gamma| = \sqrt{(-8{,}6027)^2+(-1{,}5892)^2+8{,}8216^2} \approx 12{,}4239$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}-8\\-4\\4\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-8{,}6027\\-1{,}5892\\8{,}8216\end{pmatrix}}{\sqrt{96}\cdot 12{,}4239}\right) \approx 24{,}84° = \tfrac{1}{2}\gamma$$

Anmerkung: natürlich wurden nur die Endergebnisse gerundet und nicht etwa z.B. mit dem zwischengerundeten Wert 12,4239 gerechnet!

Für γ_2 kommt man durch die entsprechende Rechnung auf das gleiche Ergebnis, die Überprüfung bleibt zur Übung dem Leser überlassen.